

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	45 (1999)
Heft:	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 PUZZLES DE YOCOZO POUR LES APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE
Autor:	ROESCH, Pascale
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-64443

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PUZZLES DE YOCOZ
POUR LES APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE

par Pascale ROESCH

La dynamique d'une fraction rationnelle $f: \widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ est de nos jours bien comprise dans l'ensemble de Fatou $F(f)$, défini comme le plus grand ouvert de $\widehat{\mathbf{C}}$ sur lequel les applications itérées

$$f^n = \underbrace{(f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois}}, \quad n \geq 0,$$

forment une famille normale (*i.e.* équicontinue). Un théorème de D. Sullivan [S] assure en effet que chaque composante connexe U de $F(f)$ est pré-périodique et des résultats plus anciens de “linéarisation” permettent alors, dans la plupart des cas, de modéliser la dynamique de f sur U . Si U contient par exemple un unique point critique a de f et si celui-ci est fixe par f , un théorème de L. Böttcher [B] fournit une représentation conforme ϕ du disque unité ouvert $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ dans U qui conjugue $f|_U$ à l'application $z \mapsto z^d$, où d est l'ordre de la plus petite dérivée non nulle de f en a .

Hors de $F(f)$, c'est-à-dire dans l'ensemble de Julia $J(f) = \widehat{\mathbf{C}} \setminus F(f)$, la construction de modèles comparables passe par une étude topologique. Un théorème de C. Carathéodory [C] affirme en effet qu'une représentation conforme de \mathbf{D} sur un ouvert $\Omega \subset \widehat{\mathbf{C}}$ se prolonge continûment au bord si et seulement si la frontière de Ω est localement connexe. Appliqué à la représentation de Böttcher $\phi: \mathbf{D} \rightarrow U$, ce théorème montre que la dynamique de f sur ∂U est semi-conjuguée à la multiplication par d sur le cercle si et seulement si ∂U est localement connexe. Par ailleurs, dans le cas où f est un polynôme et où U est la composante de $F(f)$ qui contient l'infini — ce dernier étant de plus le seul point critique de f dans U —, le bord de U est en fait l'ensemble de Julia $J(f)$ tout entier. La question de la connexité

locale des ensembles de Julia est donc cruciale pour comprendre la dynamique des fractions rationnelles, de même d'ailleurs que la question de la connexité locale des ensembles limites est centrale dans l'étude des groupes kleiniens. Le but de cet article est de présenter, dans un cadre élargi, la méthode des puzzles introduite par J.-C. Yoccoz — à la suite des travaux de B. Branner et J. H. Hubbard sur les polynômes cubiques [BH] — pour examiner ce problème dans le contexte des polynômes quadratiques.

Pour être localement connexe, ∂U doit déjà contenir des compacts connexes stricts non ponctuels. On ne sait pas toujours exhiber de telles parties, mais on y parvient cependant dans de nombreux cas en trouvant des points de coupure grâce à des résultats de A. Douady, J. H. Hubbard, D. Sullivan et J.-C. Yoccoz qui montrent la convergence, lorsque r tend vers 1, des rayons paramétrés

$$r \in [0, 1] \longmapsto \phi(r e^{2i\pi t}), \quad \text{où } t \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

et caractérisent leurs limites (voir le théorème 2.4). Une fois qu'on a obtenu de tels continuums $C \subset \partial U$, on regarde leurs préimages itérées dans ∂U ; il est légitime d'espérer que leur diamètre tend vers 0 pour la raison suivante: d'après les travaux de P. Fatou [F] et G. Julia [J], $J(f)$ est l'adhérence des points périodiques répulsifs de f et le comportement de f sur $\partial U \subset J(f)$ est donc a priori dilatant. En fait, cette dilatation n'est vraiment forte et uniforme que si $J(f)$ ne rencontre pas (ou éventuellement en un nombre fini de points) l'ensemble post-critique $P(f)$. Par définition, cet ensemble est l'adhérence des orbites positives de tous les points critiques de f et le comportement de f sur $P(f)$ est donc plutôt contractant. Si $J(f) \cap P(f)$ est vide (resp. fini), on dit que f est hyperbolique (resp. géométriquement finie) et la connexité locale est bien établie [DH1, M3, TY] (voir la partie 2.3 pour un aperçu de la preuve).

Lorsque les phénomènes de contraction et de dilatation se mêlent dans l'ensemble de Julia, le problème de la connexité locale est plus délicat et les résultats obtenus en 1989 par J.-C. Yoccoz pour les polynômes quadratiques constituent un progrès très important. L'ensemble de Julia d'un tel polynôme f est connexe si et seulement si l'infini est le seul point critique dans la composante non bornée U de $F(f)$ et, comme on l'a dit plus haut, $J(f)$ coïncide avec ∂U . Yoccoz se donne alors un graphe $\Gamma = \overline{\phi(\Gamma_D)}$, où $\Gamma_D \subset \mathbf{D}$ est constitué d'un cercle centré en 0 et de plusieurs rayons formant un cycle périodique par $z \mapsto z^2$ et dont les images par la représentation de Böttcher $\phi: \mathbf{D} \rightarrow U$ convergent vers un même point fixe de f . L'adhérence de chaque composante de $\mathbf{C} \setminus \Gamma$ a alors une intersection connexe (ou vide) avec $J(f)$ mais, sans hyperbolité, on ne sait pas contrôler directement le diamètre de ses préimages itérées. Pour montrer que ce diamètre tend vers 0, Yoccoz

étudie le module des anneaux $P_n \setminus \bar{P}_{n+1}$, où $P_{n+1} \subset P_n$ et P_n, P_{n+1} sont des composantes connexes respectives de $\mathbf{C} \setminus f^{-n}(\Gamma)$, $\mathbf{C} \setminus f^{-(n+1)}(\Gamma)$. Il établit alors la connexité locale sous certaines hypothèses en montrant que la somme de ces modules diverge. On peut trouver des exposés sur ce travail (non publié) de J.-C. Yoccoz dans [H, M2].

Cet article se propose de présenter la méthode de Yoccoz dans un contexte plus large que celui des polynômes quadratiques, afin de la rendre directement applicable à des fractions rationnelles de degré plus élevé (voir par exemple [R]). Le cadre est celui des *applications à allure rationnelle*. Étant donné une telle application f , on dégage, dans la première partie, des conditions suffisantes (théorème 1.10) portant sur un graphe Γ pour que les composantes connexes du complémentaire des préimages itérées $f^{-n}(\Gamma)$, $n \geq 1$, qui rencontrent $J(f)$, aient un diamètre qui tende vers 0 avec n . L'exposé utilise le langage des tableaux introduit par B. Branner et J. H. Hubbard dans [BH] et s'inspire en partie de la thèse de D. Faught [Fa]. Au passage, on s'efforce aussi d'unifier le traitement des divers types de récurrence qui apparaissent.

Dans la seconde partie, on montre comment appliquer en pratique cette théorie pour établir un résultat concret (original) de connexité locale (théorème 2.1). Précisément, on montre que si un polynôme de degré $d+1$, $d \geq 2$, a un point critique de multiplicité $d-1$ qui est fixe, le bord du bassin immédiat de ce point est une courbe de Jordan, de sorte que la dynamique y est conjuguée à la multiplication par d sur le cercle.

§ 1 LA THÉORIE

1.1 APPLICATIONS À ALLURE RATIONNELLE

DÉFINITION 1.1. Une application $f: X' \rightarrow X$ est dite *à allure rationnelle* si :

- X et X' sont des ouverts connexes de $\widehat{\mathbf{C}}$ à bords lisses, X contient l'adhérence \bar{X}' de X' et ∂X a un nombre fini de composantes connexes ;
- $f: X' \rightarrow X$ est une application holomorphe propre qui a un nombre fini de points critiques et se prolonge en une application continue $\bar{X}' \rightarrow \bar{X}$.

Si X et X' sont simplement connexes, une application à allure rationnelle $f: X' \rightarrow X$ est une application à *allure polynomiale* au sens de Douady-Hubbard [DH2]. Une application à allure polynomiale qui est de degré deux est dite *à allure quadratique*.

Avant de donner l'exemple typique d'applications à allure rationnelle, on rappelle qu'un point x est *périodique* par f s'il existe un entier $p > 0$ tel que $f^p(x) = x$, où f^p désigne le p -ième itéré de f . De plus, un tel point x est

<i>répulsif</i> si	$ (f^p)'(x) > 1$,
<i>indifférent</i> si	$ (f^p)'(x) = 1$,
<i>attractif</i> si	$ (f^p)'(x) \in]0, 1[$ et
<i>super-attractif</i> si	$(f^p)'(x) = 0$.

D'autre part, x est *pré-périodique* s'il existe un entier q tel que $f^q(x)$ soit périodique. Enfin, un *point critique* de f est un point x où la dérivée f' s'annule. La *multiplicité* de x est le plus grand entier $m > 0$ tel que $f^{(m)}(x) = 0$. Un point p -périodique super-attractif est donc un point fixe et critique de f^p .

EXEMPLE 1.2. Soit $f: \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ une fraction rationnelle et $A(f)$ la réunion des orbites positives de tous ses points périodiques (super-) attractifs. Si U_0 est un voisinage ouvert de $A(f)$ dont le bord est lisse, ne porte aucun point critique de f , et dont l'image $f(U_0)$ est relativement compacte dans U_0 , tous les ouverts $U_n = f^{-n}(U_0)$, $n \geq 0$, sont du même type. Par suite, si on pose, pour un entier $n \geq 0$ quelconque,

$$X = \widehat{\mathbf{C}} \setminus \overline{U_n}, \quad X' = f^{-1}(X),$$

la restriction de f à X' , $f|_{X'}: X' \rightarrow X$, est une application à allure rationnelle. De plus, pour n assez grand, U_n contient tous les points critiques de f qui sont attirés par $A(f)$ de sorte que ceux-ci n'apparaissent pas comme points critiques de $f|_{X'}$.

Par exemple, pour $f(z) = z^2 - 1$. Le point critique 0 est périodique de période 2 de sorte que pour r suffisamment petit, f^2 envoie le disque $D(0, r)$ strictement à l'intérieur de lui-même. L'application f admet une branche inverse définie sur $\mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{R} \mid z \leq -1\}$ à valeur dans le demi-plan $x < 0$. On peut donc trouver un petit disque D' contenant -1 tel que $f(D')$ soit compris entre $D(0, r)$ et $f^2(D(0, r))$ strictement. Ainsi, D' contient $\overline{f(D(0, r))}$ et D contient $\overline{f(D')}$. Par contre pour R grand $f^{-1}(D(0, R^2))$ est proche du disque de rayon R , son d'adhérence est donc dans $D(0, R^2)$. Ceci permet de voir le polynôme f comme une application à allure rationnelle en posant $X = D(0, R^2) \setminus (\overline{f(D(0, r))} \cup \overline{f(D')})$ et $X' = f^{-1}(X)$. Dans cet exemple, illustré par la figure 0, l'application $f|_{X'}$ n'a plus de points critiques.

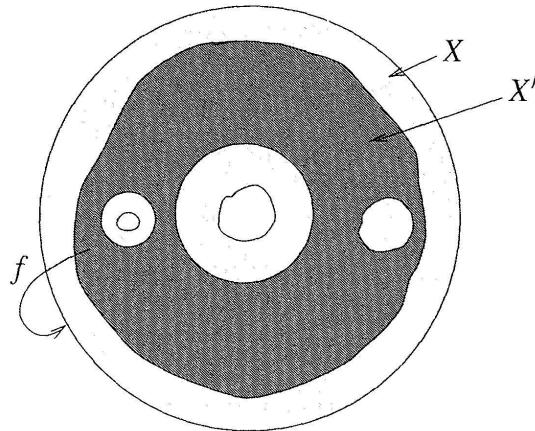


FIGURE 0

Le polynôme $z^2 - 1$ présenté comme application à allure rationnelle
 $f: X' \rightarrow X$ avec X' en noir et X en gris

En particulier, si $f: \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$ est une fraction rationnelle *hyperbolique*, c'est-à-dire dont chaque point critique est attiré par l'orbite d'un point périodique (super-) attractif, l'application à allure rationnelle qu'on obtient par le procédé général décrit ci-dessus (pour n grand) n'a aucun point critique. Dans la suite, on regarde plus spécialement le cas où il reste un unique point critique :

DÉFINITION 1.3. Une application à allure rationnelle $f: X' \rightarrow X$ est dite *simple* si elle a au plus un point critique, lequel est *simple*, c'est-à-dire de multiplicité 1.

DÉFINITION 1.4. L'*ensemble de Julia* rempli d'une application à allure rationnelle (quelconque) $f: X' \rightarrow X$ est l'ensemble $K(f)$ des points x de X' dont tous les itérés $f^n(x)$ sont définis et restent dans X . Autrement dit,

$$K(f) = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(X).$$

REMARQUE 1.5. L'ensemble de Julia rempli $K(f)$ de f est compact car il coïncide avec l'intersection des compacts $f^{-n}(\bar{X}')$, $n \geq 0$.

D'autre part, la famille $\{f^n\}$ est normale sur l'intérieur de $K(f)$ car l'orbite de tout point de $K(f)$ évite l'ensemble $X \setminus X'$ qui contient au moins trois points. Par contre, près d'un point x de la frontière de $K(f)$, la famille $\{f^n\}$ n'est pas équicontinu : on peut trouver des points x_i tendant vers x et des entiers n_i tendant vers l'infini tels que $f^{n_i}(x_i)$ soit hors de X' et donc loin de $f^{n_i}(x) \in K(f)$ pour tout i .

1.2 GRAPHES ET PUZZLES

DÉFINITION 1.6. Soit $f: X' \rightarrow X$ une application à allure rationnelle simple. On dit qu'un graphe Γ (formé d'arêtes – arcs de $\widehat{\mathbf{C}}$ – et de sommets – points de $\widehat{\mathbf{C}}$) est *admissible* s'il vérifie les conditions suivantes :

- Γ est un graphe connexe fini inclus dans \bar{X} et contenant ∂X ;
- Γ est *stable* au sens où $f^{-1}(\Gamma)$ contient $\Gamma \cap X'$;
- l'orbite positive du point critique ne rencontre pas Γ .

Des exemples de tels graphes seront construits par la suite.

Étant donné un graphe admissible Γ pour $f: X' \rightarrow X$, on appelle *pièce de profondeur n* , $n \geq 0$, toute composante connexe de l'ouvert $f^{-n}(X \setminus \Gamma) = f^{-n}(X) \setminus f^{-n}(\Gamma)$. Le *puzzle* associé à (X', X, f, Γ) est la collection de toutes ces pièces.

Les pièces de profondeur n donnée sont ainsi des ouverts disjoints et tout point x de $f^{-n}(X \setminus \Gamma)$ se trouve dans une unique pièce de profondeur n que l'on note $P_n(x)$.

Le bord des pièces de profondeur 0 est contenu dans Γ . Pour $n \geq 1$, le bord des pièces de profondeur n est contenu dans le graphe Γ_n où la suite Γ_n , $n \geq 0$, est définie comme suit :

$$\Gamma_0 = \Gamma, \quad \Gamma_1 = f^{-1}(\Gamma \cap X) \cup \partial X', \quad \dots, \quad \Gamma_{n+1} = f^{-n}(\Gamma_1), \quad n \geq 1.$$

Une pièce de profondeur n est donc aussi une composante connexe de $f^{-n}(X) \setminus \Gamma_n$.

LEMME 1.8. *Soit Γ un graphe admissible pour une application à allure rationnelle f de X' dans X .*

- Toute pièce de profondeur $n+1$ du puzzle associé à Γ est incluse dans une unique pièce de profondeur n .*
- Pour tout point x de $f^{-(n+1)}(X \setminus \Gamma)$, f induit une application de $P_{n+1}(x)$ sur $P_n(f(x))$ qui, selon que $P_{n+1}(x)$ contient ou non l'éventuel point critique de f , est soit un revêtement double ramifié, soit un homéomorphisme.*
- Toutes les pièces du puzzle sont simplement connexes.*

Preuve. a) Cela provient de l'inclusion $X' \subset X$ et de la stabilité de Γ .

b) Comme les pièces de profondeur n sont les composantes connexes de $f^{-n}(X \setminus \Gamma)$, chaque image $f(P_{n+1}(x))$ est contenue dans $P_n(f(x))$. De plus, comme f est ouverte, le bord de $f(P_{n+1}(x))$ est inclus dans $f(\partial P_{n+1}(x))$, donc

dans $f(\Gamma_{n+1}) = \Gamma_n$. Ceci montre que l'application de $P_{n+1}(x)$ dans $P_n(f(x))$ induite par f est propre et est donc un revêtement ramifié. Si $P_{n+1}(x)$ ne contient pas le point critique, cette application est un homéomorphisme ; sinon, c'est un revêtement double ramifié car le point critique est simple.

c) Comme le graphe Γ est connexe, les pièces de profondeur 0 sont simplement connexes. On procède ensuite par récurrence. Si P est une pièce de profondeur $n+1$, son image $f(P)$ est une pièce de profondeur n et est donc simplement connexe. Comme f induit un revêtement ramifié de P sur $f(P)$, la formule de Riemann-Hurwitz montre que P est simplement connexe. \square

DÉFINITION 1.7. Si $x \in K(f)$ est un point dont l'orbite positive ne rencontre pas Γ , il est contenu dans une suite infinie et décroissante de pièces. On appelle *bout* de x cette suite

$$(P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots \supset P_n(x) \supset \cdots),$$

et *impression* de x l'intersection de ces pièces

$$\text{Imp}(x) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(x).$$

Le lemme 1.8 montre que l'application f envoie naturellement le bout de x sur celui de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f((P_0(x) \supset P_1(x) \supset \cdots)) &= (f(P_1(x)) \supset f(P_2(x)) \supset \cdots) \\ &= (P_0(f(x)) \supset P_1(f(x)) \supset \cdots). \end{aligned}$$

En particulier, on dit qu'un bout est *périodique* par f s'il est égal à son image par f^k pour un $k > 0$.

1.3 LE THÉORÈME DE YOCOZO

DÉFINITION 1.9. Étant donné un graphe admissible Γ pour une application à allure rationnelle simple f , on dit qu'un point x de $K(f)$ est *bagué* — à la profondeur n — si la condition suivante est satisfaite :

$$\bar{P}_{n+1}(x) \subset P_n(x).$$

On dit que x est *infiniment bagué* par Γ s'il est bagué à une infinité de profondeurs différentes.

Le théorème ci-dessous, dû à J.-C. Yoccoz, est un outil essentiel pour étudier la connexité locale des ensembles de Julia (voir [H, M2]). Il fait

l'objet de cette première partie et est démontré dans les paragraphes 1.4 à 1.6. Dans la seconde partie on en donne une application.

THÉORÈME 1.10 (Yoccoz). *Soit $f: X' \rightarrow X$ une application à allure rationnelle ayant un unique point critique x_0 , lequel est simple, et soit x un point de $K(f)$. Étant donné un graphe admissible Γ qui bague x_0 et bague infiniment x , on a l'alternative suivante :*

- *si le bout du point critique x_0 n'est pas périodique, l'impression $\text{Imp}(x)$ est réduite au point x ;*
- *si le bout du point critique x_0 est périodique, de période k , l'application $f^k: P_{l+k}(x_0) \rightarrow P_l(x_0)$ est à allure quadratique, pour un entier l assez grand, et son ensemble de Julia rempli est l'impression $\text{Imp}(x_0)$ de x_0 . De plus, selon que x tombe ou non dans $\text{Imp}(x_0)$ par itération, son impression $\text{Imp}(x)$ est soit une préimage conforme de $\text{Imp}(x_0)$, soit le seul point x .*

REMARQUE 1.11. a) Les deux cas envisagés dans le théorème 1.10 se présentent. Lorsque x_0 et $f(x_0)$ sont séparés par Γ , que $f(x_0)$ est périodique alors que x_0 ne l'est pas, le bout du point critique n'est pas périodique. Par contre lorsque x_0 est périodique son bout est évidemment périodique.

b) Si l'impression d'un point x de $K(f)$ est réduite à x , la suite des pièces $P_n(x)$ forme un système fondamental de voisinages de x . Ainsi, si l'intersection de $K(f)$ avec $P_n(x)$ ou $\bar{P}_n(x)$ est connexe pour tout n assez grand, l'ensemble $K(f)$ est localement connexe en x .

Pour exploiter le théorème de Yoccoz, il faut donc d'abord construire des graphes Γ qui soient admissibles pour f , et en particulier stables. Lorsque f est en fait définie sur \bar{X} , la stabilité de Γ est équivalente à la condition $f(\Gamma) \cap X \subset \Gamma$, qui est un peu plus maniable.

Il faut ensuite que ces graphes baguent infiniment les points de $K(f)$. Le lemme suivant donne pour cela un critère bien utile.

LEMME 1.12. *Soit K une partie de X' contenant son image $f(K)$. On suppose qu'il existe un nombre fini de graphes admissibles $\Gamma^0, \dots, \Gamma^r$ et un entier l tels que tout point de K soit bagué, à une profondeur inférieure à l , par l'un des graphes Γ^i . Alors tout point de K est infiniment bagué par l'un des Γ^i .*

Preuve. Pour $0 \leq i \leq r$, soit U_i l'ensemble des points bagués à une profondeur inférieure à l par Γ^i . Par définition, U_i est la réunion des pièces

P_{n+1}^i de profondeur $n+1 \leq l$ (définies par Γ^i) dont l'adhérence est incluse dans une pièce P_n^i de profondeur n . Par hypothèse, la réunion des U_i pour $0 \leq i \leq r$ recouvre K .

Si x est un point de K , son orbite (positive) reste dans K car K contient $f(K)$. Par suite, elle visite une infinité de fois l'un des U_i , donc aussi une infinité de fois l'une des pièces $P_{n+1}^i \subset U_i$. Autrement dit, $f^{n_j}(x)$ est dans P_{n+1}^i pour une infinité d'entiers n_j . Comme chaque application f^{n_j} est ouverte et envoie proprement les pièces $P_{n+n_j+1}^i(x)$ et $P_{n+n_j}^i(x)$ sur P_{n+1}^i et P_n^i respectivement, le fait que \bar{P}_{n+1}^i soit inclus dans P_n^i implique que l'adhérence de $P_{n+n_j+1}^i(x)$ est contenue dans $P_{n+n_j}^i(x)$. Par conséquent, x est bagué par Γ^i à toutes les profondeurs $n+n_j$. \square

Les paragraphes suivants de cette première partie exposent la preuve du théorème de Yoccoz 1.10. En voici auparavant un premier aperçu dans lequel on introduit quelques notions utiles.

Dans le bout d'un point x , on prend deux pièces consécutives et on regarde leur différence $A_i(x) = P_i(x) \setminus \bar{P}_{i+1}(x)$. Si x est bagué à la profondeur i , $A_i(x)$ est un anneau de $\widehat{\mathbf{C}}$ au sens où son complémentaire dans $\widehat{\mathbf{C}}$ a deux composantes connexes dont une, au moins, n'est pas un point. L'anneau $A_i(x)$ est alors (voir [A]) conformément équivalent à un unique anneau standard

$$A_r = \{z \in \mathbf{C} \mid r < |z| < 1\}, \quad r \geq 0.$$

et possède un *module* qui vaut

$$\text{mod } A_i(x) = -\frac{\log r}{2\pi} \in]0, \infty].$$

Si $\partial P_i(x)$ touche $\partial P_{i+1}(x)$, on dira que $A_i(x)$ est un *anneau dégénéré* et on lui attribuera un module nul. On dispose alors du critère suivant :

LEMME 1.13. *Si la série des modules des anneaux $P_i(x) \setminus \bar{P}_{i+1}(x)$ diverge, l'impression $\text{Imp}(x)$ de x est réduite au point x .*

Preuve. C'est une conséquence directe des deux résultats classiques suivants que l'on trouvera par exemple dans [A] :

- si un anneau A contient une suite d'anneaux A_i disjoints et tous homotopes à A , alors $\text{mod } A \geq \sum_i \text{mod } A_i$ (inégalité de Grötzsch);
- si U est un disque conforme, si $K \subset U$ est un compact connexe plein (i.e. tel que $U \setminus K$ soit connexe) et si le module de l'anneau $A = U \setminus K$ est infini, alors K est réduit à un point. \square

La proposition qui suit (version triviale du théorème de Yoccoz) règle le cas où le point critique x_0 n'est pas dans $K(f)$, moyennant un rétrécissement de X' . En outre elle donne une idée sur la manière dont on peut appliquer le lemme ci-dessus et utiliser la dynamique pour étudier la série $\sum_i \text{mod} A_i(x)$.

PROPOSITION 1.14. *Soit $f: X' \rightarrow X$ une application à allure rationnelle n'ayant aucun point critique et soit x un point de $K(f)$. Si un graphe admissible Γ bague x infiniment, l'impression $\text{Imp}(x)$ est réduite au point x .*

Preuve. Soit \mathcal{A} l'ensemble des anneaux de la forme $P_0 \setminus \bar{P}_1$, où P_0, P_1 sont des pièces du puzzle de profondeurs respectives 0 et 1. Comme le graphe Γ est fini, \mathcal{A} est un ensemble fini. Par ailleurs, comme f n'a aucun point critique, f^i induit, pour tout $i \geq 0$, un homéomorphisme conforme de l'anneau $A_i(x)$ sur un anneau élément de \mathcal{A} . Il en résulte d'une part qu'il existe une infinité d'entiers i pour lesquels les images $f^i(A_i(x))$ sont égales à un même anneau $A \in \mathcal{A}$, d'autre part que ces anneaux $A_i(x)$ ont tous le même module que A . Par suite, la série $\sum_i \text{mod} A_i(x)$ diverge et le lemme 1.13 en tire la conclusion. \square

Cette preuve s'effondre évidemment dès que f a un point critique x_0 dans $K(f)$. Quand $P_i(x)$ contient x_0 , on peut seulement minorer le module de $A_i(x)$ par $(1/2) \text{mod} A_{i-1}(f(x))$ (voir le lemme 1.17). La comparaison de $\text{mod} A_i(x)$ avec le module des anneaux de profondeur 0 dépend alors du nombre d'images itérées de $P_i(x)$ qui contiennent x_0 et, en fin de compte, de la récurrence du point critique x_0 . Si celle-ci n'est pas trop forte, on peut encore trouver une infinité d'anneaux $A_i(x)$ ayant un même module. Sinon, une étude plus approfondie de la combinatoire est nécessaire.

1.4 PRÉSENTATION DES TABLEAUX ET DE LEURS PROPRIÉTÉS

Soit Γ un graphe admissible pour une application à allure rationnelle simple $f: X' \rightarrow X$ et x un point de $K(f)$ dont l'orbite positive évite Γ .

DÉFINITION 1.15. Le *tableau* $T(x)$ du point x est la matrice de pièces, infinie vers la droite et le bas, dont la j -ième colonne, $j \geq 0$, donne en descendant les éléments du bout de $f^j(x)$. Autrement dit, l'élément de la j -ième colonne et i -ième ligne (en comptant vers le bas) est la pièce $T(x)_{i,j} = P_i(f^j(x))$, $i, j \geq 0$.

Ainsi, pour tous $i \geq 1$, $j \geq 0$, l'inclusion $P_i(f^j(x)) \rightarrow P_{i-1}(f^j(x))$

donne une flèche verticale montante sur $T(x)$, tandis que l'application $P_i(f^j(x)) \rightarrow P_{i-1}(f^{j+1}(x))$ induite par f fournit une flèche diagonale montante. En outre, toutes ces flèches commutent.

$$\begin{array}{ccccccc}
 P_0(x) & & P_0(f(x)) & & P_0(f^2(x)) & & \dots \\
 i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & \dots \\
 P_1(x) & \circlearrowleft & P_1(f(x)) & \circlearrowleft & P_1(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & \dots \\
 P_2(x) & \circlearrowleft & P_2(f(x)) & \circlearrowleft & P_2(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots \\
 P_i(x) & \circlearrowleft & P_i(f(x)) & \circlearrowleft & P_i(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & i \uparrow & f \nearrow & \dots \\
 P_{i+1}(x) & \circlearrowleft & P_{i+1}(f(x)) & \circlearrowleft & P_{i+1}(f^2(x)) & \circlearrowleft & \dots \\
 \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots
 \end{array}$$

Les diagonales sud-ouest—nord-est (le long desquelles agit la dynamique f) seront appelées *diagonales du tableau* $T(x)$. On appellera aussi *double diagonale* toute paire de diagonales consécutives.

DÉFINITION 1.16. On appelle *anneau de profondeur i du tableau* $T(x)$ tout anneau, éventuellement dégénéré, de la forme $A_i(y) = P_i(y) \setminus \bar{P}_{i+1}(y)$, où y est dans l'orbite positive de x .

Un tel anneau est dit *critique* (respectivement *non-critique*, respectivement *semi-critique*) si le point critique x_0 se trouve dans $P_{i+1}(y)$ (respectivement hors de $P_i(y)$, respectivement dans $P_i(y) \setminus P_{i+1}(y)$).

LEMME 1.17.

1) *Le caractère dégénéré ou non des anneaux du tableau est constant le long des doubles diagonales.*

2) *L'image par f de l'anneau $A_i(y) = P_i(y) \setminus \bar{P}_{i+1}(y)$, $i > 0$, est l'anneau $A_{i-1}(f(y))$ si et seulement si l'anneau $A_i(y)$ n'est pas semi-critique.*

Si $A_i(y)$ est critique (resp. non-critique), f induit un revêtement double non ramifié (resp. un homéomorphisme) de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}(f(y))$ et $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = 2 \text{ mod } A_i(y)$ (resp. $= \text{mod } A_i(y)$).

Dans le cas où $A_i(y)$ est semi-critique, bien que $A_{i-1}(f(y))$ ne soit pas l'image $f(A_i(y))$, on a la comparaison

$$\text{mod } A_{i-1}(f(y)) \leq 2 \text{ mod } A_i(y).$$

Preuve. 1) Si $A_i(y)$ est dégénéré, $A_{i-1}(f(y))$ l'est aussi. En effet, comme f induit une application propre de $P_i(y)$ sur $P_{i-1}(f(y))$, un point commun à $\partial P_i(y)$ et $\partial P_{i+1}(y)$ va sur un point commun à $\partial P_{i-1}(f(y))$ et $\partial P_i(f(y))$.

De plus, comme f est ouverte, le bord de $P_i(f(y)) = f(P_{i+1}(y))$ est entièrement inclus dans $P_{i-1}(f(y)) = f(P_i(y))$. Par suite, si $A_i(y)$ n'est pas dégénéré, $A_{i-1}(f(y))$ ne l'est pas non plus.

2) D'après le lemme 1.8, pour tout entier $k > 0$, f induit une application $f_k: P_k(y) \rightarrow P_{k-1}(f(y))$ qui est soit un homéomorphisme soit un revêtement double ramifié.

i) Si x_0 est dans $P_{i+1}(y)$, les applications f_i et f_{i+1} sont des revêtements doubles ramifiés en x_0 . Par suite, $f^{-1}(f(P_{i+1}(y))) \cap P_i(y) = P_{i+1}(y)$ et l'anneau image $f(A_i(y))$ coïncide donc avec $A_{i-1}(f(y))$. De plus, f induit un revêtement double non ramifié de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}(f(y))$.

Si $A_{i-1}(f(y))$ est non dégénéré, l'anneau $A_{i-1}(f(y))$ est conforme à un anneau standard A_{r^2} et l'application $f: A_i(y) \rightarrow A_{i-1}(f(y)) \simeq A_{r^2}$ se relève en un homéomorphisme conforme $A_i(y) \rightarrow A_r$ par le revêtement $A_r \rightarrow A_{r^2}$, $z \mapsto z^2$. Par suite, $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = -2 \log r/(2\pi)$ et donc $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = 2 \text{ mod } A_i(y)$.

ii) Si x_0 n'est pas dans $P_i(y)$, les applications f_i et f_{i+1} sont des homéomorphismes conformes. Par suite, f induit un homéomorphisme conforme de $A_i(y)$ sur $A_{i-1}(f(y))$ et $\text{mod } A_{i-1}(f(y)) = \text{mod } A_i(y)$.

iii) Si x_0 est dans $P_i(y) \setminus P_{i+1}(y)$, l'application f_i est un revêtement double ramifié tandis que f_{i+1} est un homéomorphisme. Par suite, l'intersection $f^{-1}(f(P_{i+1}(y))) \cap P_i(y)$ est formée de deux composantes connexes, $P_{i+1}(y)$ et une autre composante qu'on note Q . L'image $f(A_i(y))$ contient alors $f(Q) = f(P_{i+1}(y))$. Ainsi, $f(A_i(y)) = f(P_i(y))$.

Pour comparer les modules, on choisit un homéomorphisme conforme de l'anneau $A_{i-1}(f(y))$ sur un anneau standard A_r . On considère dans A_r le cercle de rayon R passant par le point correspondant à la valeur critique $f(x_0)$. Ramené dans l'anneau $A_{i-1}(f(y))$, ce cercle donne une courbe de Jordan Γ qui entoure $f(P_{i+1}(y))$ et passe par la valeur critique $f(x_0)$. L'image réciproque de Γ par f est un huit que l'on décompose en ses boucles Γ_1 et Γ_2 entourant respectivement $P_{i+1}(y)$ et Q et se touchant au point critique. L'application f envoie alors l'anneau A compris entre $\partial P_i(y)$ et $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ sur l'anneau compris entre $\partial P_{i-1}(f(y))$ et Γ avec un degré 2. Par suite, $\text{mod } A = -\frac{1}{2} \frac{\log R}{2\pi}$. De plus, le disque bordé par Γ_1 et contenant $P_{i+1}(y)$ est conforme au disque bordé par Γ et contenant $P_i(f(y))$. Par suite, l'anneau A' compris entre Γ_1

et $\partial P_{i+1}(y)$ est conforme à l'anneau compris entre Γ et $\partial P_i(f(y))$, donc $\text{mod } A' = -\frac{\log(r/R)}{2\pi}$.

Finalement, les anneaux A et A' sont disjoints et homotopes à l'anneau $A_i(y)$, de sorte que l'inégalité de Grötzsch donne

$$\operatorname{mod} A_i(y) \geq -\frac{1}{2} \frac{\log R}{2\pi} - \frac{\log(r/R)}{2\pi} \geq -\frac{1}{2} \frac{\log r}{2\pi} = \tfrac{1}{2} \operatorname{mod} A_{i-1}(f(y)).$$

1

LEMME 1.18. *Quelques propriétés du tableau $T(x)$.*

T1) Si le terme $T(x)_{i,j}$ est critique (c'est-à-dire contient le point critique x_0), il en est de même de tous les termes situés au-dessus, i.e. du type $T(x)_{k,j}$ avec $k \leq i$.

T2) Si le terme $T(x)_{m,n}$ est critique, le triangle de $T(x)$ situé entre la verticale et la diagonale montantes issues de ce point est une copie du triangle de $T(x_0)$ situé entre la verticale et la diagonale montantes issues de $T(x_0)_{m,0}$; autrement dit,

$$T(x)_{m-i,n+j} = T(x_0)_{m-i,j} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq i \leq m.$$

T3) On suppose que $T(x)_{m,n}$ et $T(x)_{m-i,n+i}$, $i > 0$, sont deux termes critiques et que, sur la diagonale qui les joint, aucun terme entre eux n'est critique. Si l'anneau $A_m(f^n(x))$ est semi-critique, il en est de même de l'anneau $A_{m-i}(f^{n+i}(x))$ à condition que l'anneau $A_{m-i}(f^i(x_0))$ — du tableau $T(x_0)$ — soit critique.

Illustration de ces propriétés (les symboles c et \emptyset indiquent les pièces respectivement critiques et non-critiques).

c	\dots	\dots	\dots	c	\dots		\dots	c	\dots	\dots	\dots	\dots	c
c	\dots	\dots	\dots	\emptyset	c	\dots	\dots	c	\dots	\dots	\dots	\emptyset	\emptyset
\vdots	\dots	\dots	\dots	\emptyset	\dots	\dots	\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\emptyset	\dots
\vdots	\emptyset	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\vdots	\emptyset	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
c	\emptyset	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	c	\emptyset	\dots	\dots	\dots	\dots
c	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\emptyset	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

Preuve. T1) provient de l'inclusion $T(x)_{i,j} \subset T(x)_{k,i}$.

T2) provient de l'unicité de la pièce de profondeur n contenant le point critique et de l'action diagonale de f .

T3) D'après T2) et T1), l'application f^i induit des revêtements doubles ramifiés de $T(x_0)_{m,0}$ sur $T(x_0)_{m-i,i}$ et de $T(x_0)_{m+1,0}$ sur $T(x_0)_{m-i+1,i}$. Par suite, $T(x_0)_{m-i+1,i}$ a une seule préimage par f^i dans $T(x_0)_{m,0}$, à savoir $T(x_0)_{m+1,0}$, ce qui empêche $T(x)_{m-i+1,n+i}$ d'être critique. \square

1.5 RÉDUCTION AU CAS D'UN TABLEAU CRITIQUE RÉCURRENT PERSISTANT

Dans toute cette partie, on se place dans les hypothèses du théorème 1.10. En d'autres termes, *on suppose que le point critique x_0 est dans $K(f)$* (le cas $x_0 \notin K(f)$ est réglé par la proposition 1.14), *on se donne un point x de $K(f)$ et un graphe admissible Γ qui bague le point critique x_0 et bague infiniment le point x .*

En suivant le plan exposé à la fin de la partie 1.3, on cherche à évaluer le module des anneaux non dégénérés qui baguent x . Pour chaque anneau, l'estimation dépend du nombre d'images itérées qui sont critiques ou semi-critiques. Ceci conduit à utiliser la fonction τ de Yoccoz et à regarder le type de récurrence des tableaux.

DÉFINITION 1.19. On appelle *fonction τ de Yoccoz* la fonction de \mathbf{N} dans $\mathbf{N} \cup \{-1\}$ définie comme suit: pour tout entier $n \geq 0$, $\tau(n)$ est la profondeur du premier itéré (strict) de la pièce $P_n(x)$ qui contient le point critique x_0 ; si cet itéré n'existe pas, on pose $\tau(n) = -1$. Autrement dit, si $\Sigma(n)$ désigne l'ensemble

$$\Sigma(n) = \{i \in [0, n-1] \mid x_0 \in P_i(f^{n-i}(x))\}, \quad n \in \mathbf{N},$$

la fonction τ est donnée par

$$\tau(n) = \begin{cases} \sup \Sigma(n) & \text{si } \Sigma(n) \neq \emptyset, \\ -1 & \text{si } \Sigma(n) = \emptyset. \end{cases}$$

En particulier, $\tau(n) < n$ et, comme $P_{i+1}(f^{n-i}(x))$ est contenu dans $P_i(f^{n-i}(x))$ pour tout $i \geq 0$, $\tau(n+1) \leq \tau(n) + 1$.

REMARQUE 1.20. Sur le tableau $T(x)$, la valeur $\tau(n)$ se lit comme la profondeur de la première pièce critique qu'on rencontre strictement après $T(x)_{n,0}$ sur la diagonale issue de ce terme.

Si x n'est autre que le point critique x_0 , alors $\tau(n)$ est la profondeur du premier retour de x_0 dans une pièce du bout critique.

DÉFINITION 1.21. Un tableau $T(x)$ est dit :

- *non récurrent* si la fonction τ est bornée;
- *récurrent non persistant* si $\liminf \tau < \infty$ et $\limsup \tau = \infty$;
- *récurrent persistant* si $\liminf \tau = \infty$.

Si un tableau $T(x)$ est récurrent (resp. récurrent persistant, resp. non récurrent) il en est de même du tableau $T(f(x))$.

On va étudier l'impression du point x en fonction du type de récurrence de son tableau $T(x)$.

LEMME 1.22. *Si le tableau de x est non récurrent, on peut y trouver un anneau non dégénéré noté A_p — de profondeur p — tel que, pour une infinité d'entiers n , l'application f^{n-p} induise un revêtement double non ramifié de $A_n(x)$ sur A_p . En particulier, l'impression de x est réduite au point x .*

Preuve. Si $\tau(n) \leq p$ pour tout n , le tableau $T(x)$ ne contient aucune pièce critique au-delà de la profondeur p . Ainsi, si $A_{n_i}(x)$ est une suite d'anneaux de $T(x)$ baguant x , chaque application

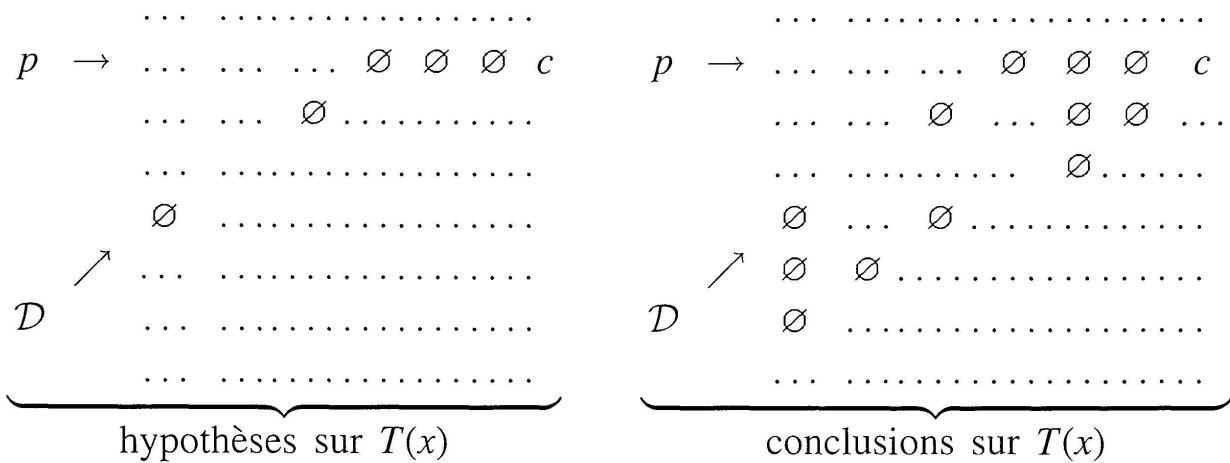
$$f^{n_i-1-p} : A_{n_i-1}(f(x)) \longrightarrow A_p(f^{n_i-p}(x)), \quad n_i > p,$$

est un homéomorphisme conforme (lemme 1.17). Comme il n'y a qu'un nombre fini d'anneau de profondeur p , il en existe un, noté A_p , pour lequel (quitte à extraire une sous-suite des n_i) chaque application f^{n_i-p} induit un revêtement double non ramifié de $A_{n_i}(x)$ sur A_p . Par suite, la somme des modules des anneaux du bout de x est infinie et l'impression de x est réduite au point x . \square

REMARQUE 1.23. Pour le lemme 1.22 ci-dessus, il n'est pas nécessaire de savoir que le graphe Γ bague le point critique x_0 .

A présent, on établit un lemme technique qui sera utile par la suite.

LEMME 1.24. *Soit \mathcal{D} une diagonale de $T(x)$ qui ne contient aucune pièce critique à une profondeur $\geq p$. S'il existe une première pièce critique notée $P_p(f^j(x))$ sur la ligne p au-delà de \mathcal{D} , l'application f^j induit un homéomorphisme conforme de $A_{p+j-1}(x)$ sur $A_{p-1}(f^j(x))$.*



Preuve. L'anneau $A_{p-1}(f^j(x))$ est critique car $x_0 \in P_p(f^j(x))$. Pour voir que f^j induit un homéomorphisme conforme de $A_{p+j-1}(x)$ sur $A_{p-1}(f^j(x))$, il suffit donc de montrer que $\tau(p+j-1) = p-1$ et que $\tau(p+j) = p$.

Soit (p, i) , $i < j$, le point d'intersection de \mathcal{D} avec la ligne p . Les diagonales \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' issues respectivement des points $(p + j - 1, 0)$ et $(p + j, 0)$ ne peuvent contenir de pièces critiques avant la colonne j en vertu de la propriété T1). En effet, jusqu'à la colonne i , \mathcal{D}' et \mathcal{D}'' se trouvent en-dessous de \mathcal{D} puis, jusqu'à la colonne $j - 1$, elles sont en-dessous de la ligne p . Ceci montre exactement que $\tau(p + j - 1) = p - 1$ et $\tau(p + j) = p$. \square

LEMME 1.25. *Si le tableau de x est récurrent non persistant, l'impression de x est réduite au point x .*

REMARQUE 1.26. La preuve du lemme 1.25 ci-dessus utilise le fait que x est infiniment bagué et que le point critique x_0 est bagué par Γ . Si on suppose de plus que x_0 est infiniment bagué, on peut trouver un anneau non dégénéré $A_p(x_0)$ tel que, pour une infinité d'entiers n , l'application f^{n-p} induise un revêtement non ramifié de degré borné de $A_n(x)$ sur $A_p(x_0)$.

Preuve. Soit $A_p(x_0)$ un anneau non dégénéré baguant x_0 . On va montrer que, pour une infinité d'entiers n , le module de $A_n(x)$ est comparable à celui de $A_p(x_0)$, au sens où il existe un entier r indépendant de n tel que $\text{mod } A_n(x) \geq 2^{-r} \text{ mod } A_p(x_0)$.

On pose $l = \liminf \tau < \infty$ et on envisage deux cas.

1) $p \geq l$: Dans ce cas, il existe une infinité d'anneaux du bout de $f(x)$ qui sont conformes à $A_p(x_0)$. En effet, soit $n_i < m_i < n_{i+1}$ deux suites intercalées vérifiant $\tau(n_i) = l$ et $\tau(m_i) \geq p+1$. L'inégalité $\tau(n+1) \leq \tau(n)+1$ assure qu'il existe un plus petit $k_i \in [n_i, m_i[$ pour lequel $\tau(k_i+1) = p+1$, et qu'alors $\tau(k_i) = p$. L'anneau $A_{k_i-1}(f(x))$ est donc conforme à $A_p(x_0)$. De

plus, l'anneau $A_{k_i}(x)$ est non dégénéré (car $A_p(x_0)$ l'est) et son module vaut au moins $\frac{1}{2} \bmod A_p(x_0)$. Ainsi, une infinité d'anneaux du bout de x ont un module au moins égal à $\frac{1}{2} \bmod A_p(x_0)$.

2) $p < l$: On distingue encore deux cas, suivant le type de récurrence du tableau critique.

i) Si le tableau du point critique est récurrent, on se ramène au cas 1 en trouvant un anneau non dégénéré $A_q(x_0)$ avec $q \geq l$. Pour cela, on observe que le tableau critique contient une infinité de colonnes formées de pièces critiques jusqu'à la profondeur l au moins. Il existe donc, dans la colonne 0 du tableau critique, un anneau de profondeur $q \geq l$ qui est sur une même double diagonale que l'anneau $A_p(x_0)$ pris dans une colonne d'indice assez grand (supérieur à $l - p$). Cet anneau $A_q(x_0)$ est non dégénéré (lemme 1.17).

ii) Si le tableau du point critique est non récurrent, une infinité d'anneaux $A_n(x)$ ont une orbite qui ne rencontre qu'un nombre fini borné d'anneaux critiques ou semi-critiques avant d'atteindre $A_p(x_0)$. D'abord, sauf dans la colonne 0, $T(x_0)$ ne contient aucune pièce critique au-delà d'une certaine profondeur k . Ensuite, dans $T(x)$ (tableau récurrent non persistant, avec $\liminf \tau = l \in]p, \infty[$), la double ligne $p, p+1$ coupe une infinité de colonnes suivant deux pièces critiques. En descendant les doubles diagonales (vers le Sud-Ouest) à partir de ces intersections, on croise au plus $k - p + 2$ anneaux critiques ou semi-critiques. En effet, la propriété T2) du lemme 1.18 montre que toute diagonale de $T(x)$ contient, en dehors de la colonne 0, au plus une pièce critique à une profondeur supérieure à k . Les intersections des doubles diagonales ci-dessus avec la colonne 0 de $T(x)$ fournissent ainsi, dans le bout de x , une suite d'anneaux dont les modules sont comparables au module de $A_p(x_0)$. \square

LEMME 1.27. *Si le tableau de x est récurrent persistant, le point critique x_0 est infiniment bagué par Γ . De plus, si la somme des modules des anneaux du bout critique est infinie, il en est de même pour le bout de x et l'impression $\text{Imp}(x)$ est réduite au point x .*

Preuve. On montre tout d'abord que le point critique est infiniment bagué.

Soit $A_{n_i}(x)$ la suite des anneaux baguant x . Comme $\tau(n)$ tend vers l'infini, on peut, quitte à extraire une sous-suite, supposer que la suite $\tau(n_i + 1)$ est croissante. D'autre part, les anneaux $A_{n_i}(x)$ et $A_{\tau(n_i+1)-1}(x_0)$ proviennent d'une même double diagonale donc, d'après le lemme 1.17, $A_{\tau(n_i+1)-1}(x_0)$ est non dégénéré. Par suite, le point critique est infiniment bagué.

On montre à présent que le bout de x contient une copie conforme de chaque anneau du bout critique et que ces copies sont disjointes. Ceci entraîne que, si la somme des modules est infinie pour le bout critique, elle l'est aussi pour le bout de x .

Soit p la profondeur critique maximale dans la colonne 0 de $T(x)$. Pour $i < p$, l'anneau $A_i(x)$ coïncide avec $A_i(x_0)$. Pour $i \geq p$, on regarde dans $T(x)$ la première pièce critique qu'on rencontre après la colonne 0 sur la ligne $i+1$. Si $(i+1, j)$, $j > 0$, sont les coordonnées de ce terme, le lemme 1.24 (appliqué à la ligne $i+1$ et à la diagonale \mathcal{D} issue de $(i+1, 0)$) montre que l'anneau $A_{i+j}(x)$ est conforme à $A_i(x_0)$. Comme, par construction, j croît avec i (au sens large), les copies conformes qu'on obtient sont disjointes. \square

La proposition ci-dessous résume les trois lemmes précédents.

PROPOSITION 1.28. *Soit x un point de $K(f)$ et Γ un graphe admissible qui bague le point critique x_0 et bague infiniment le point x . Pour que l'impression $\text{Imp}(x)$ soit réduite au point x , il suffit que l'une des conditions suivantes soit remplie :*

- *$T(x)$ est non récurrent ou récurrent non persistant;*
- *$T(x)$ est récurrent persistant mais $T(x_0)$ ne l'est pas.*

De plus, dès que $T(x)$ est récurrent persistant, le point critique x_0 est infiniment bagué par Γ .

Les lemmes 1.30, 1.36 et 1.37 du paragraphe suivant règlent le cas où $T(x_0)$ est récurrent persistant, le point x_0 étant infiniment bagué par Γ .

1.6 CAS D'UN TABLEAU CRITIQUE RÉCURRENT PERSISTANT

Dans toute cette partie, on suppose que Γ est un graphe admissible qui bague infiniment le point critique x_0 .

DÉFINITION 1.29. On dit que le tableau critique $T(x_0)$ est *périodique* s'il contient une colonne, autre que la colonne 0, entièrement formée de pièces critiques. Les indices de ces colonnes totalement critiques sont alors les multiples d'un entier k qu'on appelle *période* de $T(x_0)$. En fait, le tableau $T(x_0)$ est périodique de période k si et seulement si le bout du point critique x_0 est périodique de période k .

LEMME 1.30. *Si le tableau $T(x_0)$ du point critique est récurrent persistant mais non périodique, la somme des modules des anneaux du bout critique est infinie.*

Le problème des anneaux critiques est qu'ils ont un module inférieur de moitié à celui de leur image. Afin de compenser cette perte, on va trouver, pour "chaque" anneau non dégénéré $A_p(x_0)$, deux anneaux distincts de profondeur plus grande, $A_i(x_0)$ et $A_j(x_0)$, $i, j > p$, qui revêtent doublement $A_p(x_0)$ par un itéré de f .

DÉFINITION 1.31. On dira qu'un anneau $A_i(x_0)$ est le *fils* d'un anneau $A_p(x_0)$, $p < i$, si f^{i-p} induit un revêtement double non ramifié de $A_i(x_0)$ sur $A_p(x_0)$. L'anneau $A_p(x_0)$ sera donc le *père* de $A_i(x_0)$. On note que, si le père existe, il est unique.

Un anneau (critique) $A_i(x_0)$ sera dit *bon* si, dans la double ligne $i, i+1$ qui le porte, il n'y a aucun anneau semi-critique. On verra que cette qualité est héréditaire et qu'un bon anneau a toujours deux bons fils.

La démonstration du lemme 1.30 repose sur les quatre affirmations ci-dessous.

AFFIRMATION 1.32. *Tout anneau (critique) a au moins un fils.*

Preuve. Étant donné un anneau critique $A_p(x_0)$, on considère la première pièce critique qu'on rencontre dans $T(x_0)$ sur la ligne $p+1$ après la colonne 0 (elle existe bien car $T(x_0)$ est récurrent). Si on note $(p+1, i-p)$ les coordonnées de ce terme, le lemme 1.24 montre que l'anneau $A_p(x_0)$ est une copie conforme de $A_{i-1}(f(x_0))$, de sorte que $A_i(x_0)$ est un fils de $A_p(x_0)$. \square

AFFIRMATION 1.33. *Si un anneau est fils unique, il est bon.*

Preuve. On suppose que $A_i(x_0)$ est le fils de $A_p(x_0)$ mais n'est pas bon. Le tableau $T(x_0)$ contient alors un anneau semi-critique de profondeur i , $A_i(f^j(x_0))$. Celui-ci se trouve nécessairement dans une colonne d'indice $j \geq i-p$ car la double diagonale liant le fils au père est formée de pièces non critiques entre la colonne 0 et la colonne $i-p$ qui porte $A_p(f^{i-p}(x_0)) = A_p(x_0)$, ces deux colonnes n'étant pas considérées. La règle T3) du lemme 1.18 fournit alors un anneau semi-critique de profondeur p dans la colonne $j+p$ et, entre ces deux positions semi-critiques, les anneaux portés par la double diagonale de $A_i(f^j(x_0))$ sont non-critiques.

Soit $(p+1, k)$ les coordonnées de la première pièce critique rencontrée sur la ligne $p+1$ après la colonne $j+p$. L'anneau $A_p(f^k(x_0))$ est critique et la double diagonale qu'il détermine dans $T(x_0)$ est formée de pièces non critiques au moins jusqu'à la colonne j . Sur cette double diagonale, le premier anneau critique ou semi-critique rencontré se trouve à une profondeur l . Si cet anneau est critique, c'est un fils de $A_p(x_0)$ différent de $A_i(x_0)$ car $l > i$. Si c'est un anneau semi-critique, la propriété T3) montre que l'anneau $A_{l-1}(f(x_0))$ (dans la colonne 1) est conforme à un anneau semi-critique de profondeur p , à savoir $A_p(f^{l-p}(x_0))$. On note alors $A_p(f^m(x_0))$ le premier anneau critique de profondeur p qu'on trouve à droite de $A_p(f^{l-p}(x_0))$. D'après le lemme 1.24, cet anneau est l'image conforme de $A_{p+m-1}(f(x_0))$ et $A_{p+m}(x_0)$ est donc un fils de $A_p(x_0)$, à nouveau différent de $A_i(x_0)$ car $p+m > i$. \square

AFFIRMATION 1.34. *Si un anneau est bon, il a au moins deux fils.*

Preuve. Soit $A_p(x_0)$ un anneau et $A_i(x_0)$ un de ses fils (affirmation 1.32). La double diagonale qui joint $A_i(x_0)$ à son père $A_p(f^{i-p}(x_0)) = A_p(x_0)$ n'est pas critique entre les colonnes 1 et $i-p-1$. Par ailleurs, comme la colonne $i-p$ n'est pas totalement critique (car $T(x_0)$ n'est pas périodique), elle porte un anneau semi-critique de profondeur finie $k > p$. D'après la propriété T3), hors de la colonne 0, les seules positions critiques de profondeur $\geq p$ sur la double diagonale qui porte cet anneau ont pour coordonnées

$$(k - q(i-p), (q+1)(i-p)), \quad 0 \leq q \leq \frac{k-p}{i-p}.$$

En particulier, comme $A_p(x_0)$ est bon, $k-p$ ne peut être un multiple entier de $i-p$, sans quoi l'anneau $A_p(f^{k+i-2p}(x_0))$ serait semi-critique. Cet anneau $A_p(f^{k+i-2p}(x_0))$ est donc non-critique et le lemme 1.24 assure que le premier anneau critique de profondeur p situé plus à droite, sur une colonne d'indice $j > k+i-2p$, est l'image conforme de $A_{j+p-1}(f(x_0))$. L'anneau $A_{j+p}(x_0)$ est donc un second fils de $A_p(x_0)$. \square

AFFIRMATION 1.35. *Si un père est bon, ses fils le sont aussi.*

Preuve. En effet, si un anneau $A_p(x_0)$ a un fils $A_i(x_0)$ qui n'est pas bon, il existe un anneau semi-critique de profondeur i . La propriété T3) permet alors directement de trouver un anneau semi-critique de profondeur p , de sorte que $A_p(x_0)$ n'est pas bon. \square

Preuve du lemme 1.30. On va montrer que, pour tout anneau critique non dégénéré $A_p(x_0)$, la somme des modules des descendants de $A_p(x_0)$ est

infinie. Pour cela, on note \mathcal{G}_n , $n > 0$, l'ensemble des descendants de $A_p(x_0)$ à la n -ième génération (\mathcal{G}_1 est formé des fils, \mathcal{G}_2 des petits-fils...). Comme tout anneau a un fils et au plus un père, les ensembles \mathcal{G}_n sont non vides et disjoints. Par ailleurs, les affirmations démontrées plus haut assurent que chaque ensemble \mathcal{G}_n a au moins 2^{n-1} éléments. En effet, les éléments de \mathcal{G}_n sont les descendants des éléments de \mathcal{G}_1 à la $(n-1)$ -ième génération. Si \mathcal{G}_1 a au moins deux éléments, la récurrence donne l'estimation. Si \mathcal{G}_1 n'a qu'un élément, ce fils unique est bon (affirmation 1.33) et a donc deux fils (affirmation 1.34), lesquels sont bons (affirmation 1.35) et ainsi de suite.

D'autre part, si $A \in \mathcal{G}_n$, le module de A vaut $\frac{1}{2^n} \text{mod} A_p(x_0)$. La somme des modules des descendants de $A_p(x_0)$ est donc infinie. \square

LEMME 1.36. *Si le tableau $T(x_0)$ du point critique est périodique, de période k , l'application $f^k: P_{l+k}(x_0) \rightarrow P_l(x_0)$ est à allure quadratique pour un certain entier l . L'impression $\text{Imp}(x_0)$ du point critique est alors l'ensemble de Julia rempli de $f^k|_{P_{l+k}(x_0)}$ et est connexe.*

Preuve. Entre la colonne 0 et la colonne k , la profondeur des positions critiques est bornée par un entier i . Si $A_l(x_0)$ est un anneau non dégénéré de profondeur $l > i + k$, la pièce $P_l(x_0)$ contient $\bar{P}_{l+1}(x_0)$, donc aussi $\bar{P}_{l+k}(x_0)$, et l'application $f^k|_{P_{l+k}(x_0)}: P_{l+k}(x_0) \rightarrow P_l(x_0)$ est de degré 2, donc à allure quadratique.

D'autre part, pour tout $j \geq 0$, les pièces du bout de $f^{kj}(x_0)$ sont celles de la colonne kj de $T(x_0)$, c'est-à-dire les pièces critiques. Par suite, $f^{kj}(x_0) \in P_l(x_0)$ pour tout j , ce qui montre que l'ensemble de Julia rempli associé à f^k est connexe. Enfin, cet ensemble de Julia rempli est l'intersection des préimages $f^{-kj}(P_l(x_0))$ qui sont contenues dans $P_l(x_0)$. C'est donc l'intersection sur i des $P_{l+ki}(x_0)$, c'est-à-dire l'impression $\text{Imp}(x_0)$ du point critique. \square

Pour compléter la démonstration du théorème 1.10, il reste à établir le résultat ci-dessous.

LEMME 1.37. *On suppose toujours que $T(x_0)$ est périodique de période k . Si un point x tombe par itération dans l'impression $\text{Imp}(x_0)$ du point critique, son impression $\text{Imp}(x)$ est une préimage conforme de $\text{Imp}(x_0)$. Sinon, et si x est infiniment bagué par Γ , l'impression $\text{Imp}(x)$ est réduite au point x .*

Preuve. Si $f^n(x)$ est dans $\text{Imp}(x_0) = \bigcap_{i \geq 0} P_i(x_0)$, la colonne n de $T(x)$ est entièrement critique. De plus, si n est le plus petit entier tel que $f^n(x)$ soit

dans $\text{Imp}(x_0)$, les pièces critiques situées sur les colonnes $0, \dots, n-1$ de $T(x)$ ont une profondeur bornée par un entier l . Par suite, pour tout $i \geq l$, l'application f^n induit un homéomorphisme conforme de $P_{i+n}(x)$ sur $P_i(x_0)$, donc un homéomorphisme de $\text{Imp}(x)$ sur $\text{Imp}(x_0)$.

On suppose à présent que l'orbite de x évite $\text{Imp}(x_0)$, c'est-à-dire qu'aucune colonne de $T(x)$ n'est entièrement critique. On va montrer que, si $T(x)$ est récurrent, il est non persistant. Il suffit pour cela de construire une suite n_i sur laquelle τ est bornée.

Dans le tableau $T(x_0)$, entre les colonnes 0 et k , les positions critiques ont une profondeur majorée par l . Dans $T(x)$, on regarde la colonne de plus petit indice j où l'on trouve des positions critiques à une profondeur strictement supérieure à l et on note p la profondeur de la dernière position critique sur cette colonne. L'anneau $A_p(f^j(x))$ est donc semi-critique. La propriété T3) assure alors que la diagonale issue de la position $(p+j+1, 0)$ dans $T(x)$ ne contient aucune pièce critique à une profondeur strictement supérieure à $l+1$. Ainsi, $\tau(p+j+1) \leq l+1$ et on pose $n_1 = p+j+1$. On continue en considérant la colonne de plus petit indice qui contient des positions critiques de profondeur strictement supérieure à p . On construit ainsi une suite n_i sur laquelle τ reste bornée par $l+1$. \square

§ 2 LA PRATIQUE

2.1 UN THÉORÈME DE CONNEXITÉ LOCALE

On s'intéresse dans la suite aux polynômes de degré $d+1$, $d \geq 2$, dont l'un des points fixes dans \mathbf{C} est un point critique de multiplicité $d-1$. Un tel polynôme est conjugué, par une transformation affine de \mathbf{C} , à un polynôme de la forme

$$(*) \quad f(x) = a + \left(x + \frac{d+2}{d}a \right) (x-a)^d, \quad x \in \mathbf{C},$$

où a désigne le point fixe critique de multiplicité $d-1$. Le point $-a$ est alors l'unique autre point critique et sera appelé (par contraste) *point critique libre*.

Le point a est un point fixe super-attractif. Son *bassin d'attraction* est l'ouvert

$$\widetilde{B}(a) = \left\{ x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \right\}$$

et son *bassin immédiat*, noté $B(a)$, est la composante connexe de $\tilde{B}(a)$ qui contient a . Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.1. *Le bord du bassin immédiat $B(a)$ est localement connexe. En fait, c'est une courbe de Jordan.*

REMARQUE 2.2. Le cas où $d = 2$ a été considéré par D. Faught dans sa thèse [Fa].

La démonstration du théorème, qu'on expose dans la suite, distingue deux cas.

Si le point critique libre $-a$ est dans $B(a)$ ou dans le bassin de l'infini

$$B(\infty) = \left\{ x \in \widehat{\mathbf{C}} \mid f^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty \right\},$$

le polynôme f est hyperbolique. La preuve s'appuie alors sur des arguments très classiques qu'on explique brièvement dans la partie 2.3.

Dans la suite, on considère donc un polynôme f de la forme $(*)$ pour lequel $-a$ n'est ni dans $B(a)$, ni dans $B(\infty)$. La démonstration se déroule en trois étapes. On donne d'abord une première description de la dynamique du polynôme f fondée sur des résultats classiques [M1]. On exploite ensuite cette description pour trouver un graphe admissible auquel on puisse appliquer le théorème 1.10. Si le bout critique n'est pas périodique, chaque impression est réduite à un point et il suffit alors de voir que l'adhérence de toute pièce a une intersection connexe avec le bord de $B(a)$ pour établir la connexité locale. Sinon, il reste une étape pour montrer que l'impression du point critique libre rencontre $\partial B(a)$ en un seul point.

2.2 ÉTUDE RAPIDE DE LA DYNAMIQUE

On observe tout d'abord que, comme $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, le bassin d'attraction $B(\infty)$ est connexe. Ensuite, le théorème de Böttcher [B] donne le résultat suivant (voir [M1, 17.3]) :

PROPOSITION 2.3. *Si $-a$ est en dehors de $B(a)$ (resp. de $B(\infty)$), il existe une représentation conforme $\phi_a: \mathbf{D} \rightarrow B(a)$ (resp. $\phi: \mathbf{D} \rightarrow B(\infty)$) qui conjugue f à $z \mapsto z^d$ (resp. à $z \mapsto z^{d+1}$) et est unique à composition près dans \mathbf{D} avec une rotation d'angle $2k\pi/(d-1)$ (resp. $2k\pi/d$).*

De telles représentations, lorsqu'elles existent, induisent des coordonnées polaires très utiles sur $B(a)$ et $B(\infty)$. On appelle ainsi :

- *rayon d'angle* θ issu de a l'ensemble

$$R_a(\theta) = \{\phi_a(r e^{2i\pi\theta}), r \in [0, 1[\} ;$$

- *rayon externe d'angle* θ l'ensemble

$$R(\theta) = \{\phi(r e^{2i\pi\theta}), r \in [0, 1[\} ;$$

- *équipotentielle de niveau* v autour de a la courbe

$$E_a(v) = \{\phi_a(r e^{2i\pi\theta}), \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\} ;$$

- *équipotentielle externe de niveau* v la courbe

$$E(v) = \{\phi(r e^{2i\pi\theta}), \theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\} .$$

Les rayons sont des arcs sur lesquels la dynamique agit simplement : $f(R_a(\theta)) = R_a(d\theta)$ et $f(R(\theta)) = R((d+1)\theta)$. De plus, les rayons d'angles rationnels forment toujours des chemins d'accès à l'ensemble de Julia $J(f)$:

THÉORÈME 2.4 (Douady, Hubbard, Sullivan, Yoccoz).

a) *Pour tout $\theta \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, les rayons $R_a(\theta)$ et $R(\theta)$ aboutissent chacun en un point de l'ensemble de Julia, c'est-à-dire que les arcs $r \in [0, 1[\mapsto \phi_a(r e^{2i\pi\theta})$ et $r \in [0, 1[\mapsto \phi(r e^{2i\pi\theta})$ ont chacun une limite dans $J(f)$ lorsque r tend vers 1. De plus, chacune de ces limites (ou points d'aboutissement) est un point pré-périodique répulsif ou parabolique.*

b) *Tout point périodique répulsif ou parabolique de $J(f)$ est le point d'aboutissement d'au moins un rayon externe qui est périodique.*

On rappelle ici qu'un point p -périodique x de f est *parabolique* si $(f^p)'(x)$ est une racine de l'unité.

Esquisse de preuve. Pour une preuve complète, voir [M1, 18.1 et 18.2].

a) On traite le cas du rayon issu de a (l'autre est analogue). Comme θ est rationnel, $R_a(\theta)$ est pré-périodique par f et, quitte à changer θ en l'un de ses multiples, on peut supposer que $R_a(\theta)$ est fixe par un itéré f^k . On choisit un point $y_0 \in R_a(\theta)$ et on regarde la suite y_1, \dots, y_n, \dots de ses préimages successives par f^k sur $R_a(\theta)$. La distance hyperbolique $\text{dist}_h(y_n, y_{n+1})$, dans $B(a) \setminus \{a\}$, est égale à $\text{dist}_h(y_0, y_1)$. Comme la suite y_n s'accumule sur $\partial B(a)$, la distance euclidienne $\text{dist}_e(y_n, y_{n+1})$ tend vers 0. De plus, comme $f^k(y_{n+1}) = y_n$, les valeurs d'adhérence de la suite y_n sont des points fixes

par f^k et sont donc en nombre fini. Par ailleurs, toute suite $y'_i \in R_a(\theta)$ est à distance hyperbolique bornée d'une suite extraite y_{n_i} et ses valeurs d'adhérence sont donc aussi des points fixes de f^k . Comme l'accumulation du rayon est connexe, elle est réduite à un point.

b) La preuve est plus difficile et on n'en donne qu'une idée très succincte pour un point k -périodique répulsif x . D'après un théorème classique de G. Koenigs, x possède un voisinage U sur lequel f est analytiquement conjuguée à l'application $z \mapsto \lambda z$ où $\lambda = (f^k)'(x)$. On voit facilement que chaque composante connexe V de $U \setminus K(f)$ est simplement connexe et le point délicat est de montrer qu'elle est périodique par f^k , *i.e.* que $f^{ki}(V) \supset V$ pour un certain entier i . On vérifie ensuite que l'anneau V/f^{ki} obtenu en quotientant V par la relation d'équivalence $x \sim f^{ki}(x)$, avec sa métrique hyperbolique, a une géodésique fermée et celle-ci se relève alors en le rayon externe cherché. \square

Dans le bassin $B(a)$, on a en outre le résultat suivant qui, compte tenu du théorème de Carathéodory [C], montre que le bord $\partial B(a)$ est une courbe de Jordan dès qu'il est localement connexe :

LEMME 2.5. *Si deux rayons issus de a (d'angles rationnels ou non) aboutissent en un même point de $\partial B(a)$, ils sont égaux.*

Preuve. Sinon, les deux rayons forment, avec leur point d'aboutissement x , une courbe de Jordan qui borde un ouvert connexe borné U . Comme ∂U est inclus dans $\bar{B}(a)$ qui est compact et invariant par f , le principe du maximum assure que la famille f^n , $n \geq 0$, est bornée sur U et donc normale. Pour obtenir une contradiction, il suffit alors de montrer que U rencontre $J(f)$. Or, si ce n'est pas le cas, x est le seul point sur lequel peuvent s'accumuler les rayons $R_a(\theta)$ contenus dans U et, par suite, tous ces rayons convergent vers x . Les angles de ces rayons forment un intervalle de \mathbf{R}/\mathbf{Z} et, comme la multiplication par deux est dilatante, on voit que tout rayon issu de a aboutit en x , ce qui est absurde. \square

2.3 LE CAS HYPERBOLIQUE

On suppose ici que $-a$ se trouve soit dans $B(a)$, soit dans $B(\infty)$. On note $P(f)$ l'ensemble post-critique de f — *i.e.* l'adhérence des orbites positives de tous les points critiques de f — et on pose $U = \widehat{\mathbf{C}} \setminus P(f)$. Comme $P(f)$ contient au moins $-a$, a et ∞ , le revêtement universel \widetilde{U} de U est un disque — sauf si $a = 0$, auquel cas l'ensemble de Julia est exactement le cercle

unité puisque $f(x) = x^{d+1}$ — et on désigne par π la projection $\tilde{U} \rightarrow U$. Par ailleurs, $f^{-1}(U) \subset U$ car f envoie $P(f)$ dans lui-même.

LEMME 2.6. *Au voisinage de $J(f)$, l'application f dilate exponentiellement la métrique hyperbolique de U .*

Preuve. On va construire une application holomorphe g de \tilde{U} dans $\pi^{-1}(f^{-1}(U)) \subset \tilde{U}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{g} & \pi^{-1}(f^{-1}(U)) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xleftarrow{f} & f^{-1}(U) \end{array}$$

et a un point fixe attractif. Le lemme découle alors du fait que, d'après le lemme de Schwarz, g contracte exponentiellement la métrique hyperbolique du disque \tilde{U} sur tout compact de \tilde{U} .

Pour trouver g , on note d'abord que $J(f)$ contient au moins un point fixe répulsif, par exemple le point d'aboutissement y_0 du rayon $R_a(0)$ (celui-ci n'est pas parabolique car il n'est pas dans $P(f)$). D'autre part, $f: f^{-1}(U) \rightarrow U$ est une application holomorphe propre sans points critiques, donc un revêtement. On obtient g en relevant $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$ à ce revêtement puis à $\pi^{-1}(f^{-1}(U))$ en une application fixant une préimage de y_0 dans \tilde{U} . \square

On suppose maintenant que $-a$ est dans $B(\infty)$. Si $\phi_a: \mathbf{D} \rightarrow B(a)$ est une représentation conforme fournie par la proposition 2.3, on regarde les applications

$$\gamma_n: \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow \widehat{\mathbf{C}}, \quad t \longmapsto \gamma_n(t) = \phi_a((1/2)^{1/d^n} e^{2i\pi t}).$$

LEMME 2.7. *La suite γ_n converge uniformément vers une application surjective de \mathbf{R}/\mathbf{Z} dans $\partial B(a)$. Par suite, $\partial B(a)$ est localement connexe.*

Preuve. Pour n_0 assez grand, l'image de γ_{n_0} est dans le voisinage de $J(f)$ où f dilate la métrique hyperbolique de U . On note alors $\lambda > 1$ la constante de dilatation de la métrique et on pose

$$C = \sup\{\text{dist}_U(\gamma_{n_0}(t), \gamma_{n_0+1}(t)), t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}\}.$$

Le fait que f envoie chaque rayon dans $B(a)$ sur un autre rayon assure que, pour tout $n \geq n_0$ et tout $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$,

$$\text{dist}_U(\gamma_n(t), \gamma_{n+1}(t)) \leq C\lambda^{n_0-n},$$

ce qui entraîne la convergence uniforme voulue. \square

Si maintenant $-a$ est dans $B(a)$, alors $f^{-1}(B(a)) = B(a)$. Il en découle l'égalité $\partial B(a) = J(f) = \partial B(\infty)$. En effet, tout point x qui n'est pas dans $\bar{B}(a)$ a un voisinage V disjoint de $\bar{B}(a)$. Par suite, toutes ses images itérées $f^n(V)$ évitent $\bar{B}(a)$, ce qui montre que la famille $\{f^n\}$ est normale sur V , donc que x n'appartient pas à $J(f)$. On applique alors à une représentation de Böttcher $\phi: \mathbf{D} \rightarrow B(\infty)$ le même raisonnement que plus haut pour montrer que $\partial B(a)$ est une image continue du cercle.

Il reste à voir que $\partial B(a)$ est bien une courbe de Jordan. On distingue deux cas :

Si $-a$ est dans $B(\infty)$, la représentation conforme $\phi_a: \mathbf{D} \rightarrow B(a)$ est bien définie et le résultat découle alors du lemme 2.5.

Si $-a$ est dans $B(a)$, en conjuguant f par une transformation de Mœbius Φ qui échange a et ∞ , on obtient un polynôme g qui possède un point fixe super-attractif $\Phi(\infty)$ et dont le bassin immédiat $(\Phi(B(\infty)))$ ne contient pas d'autres points critiques. Dans ce cas on a bien une représentation conforme du bassin immédiat à laquelle on peut alors appliquer le lemme 2.5.

2.4 CONSTRUCTION DE GRAPHES ADMISSIBLES

On suppose désormais que le point critique libre $-a$ n'est ni dans $B(a)$ ni dans $B(\infty)$ et on regarde le polynôme f comme une application à allure rationnelle de X' dans X où

$$X = \mathbf{C} \setminus \left(\phi_a((1/2)\bar{\mathbf{D}}) \cup \phi((1/2)\bar{\mathbf{D}}) \right) \quad \text{et} \quad X' = f^{-1}(X).$$

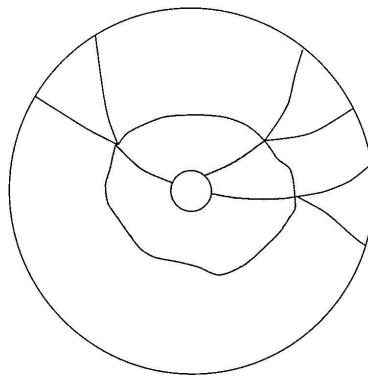


FIGURE 1

Le graphe $\Gamma(\theta)$ avec, en gris, le bassin immédiat $B(a)$ privé de $\phi_a((1/2)\bar{\mathbf{D}})$

Pour construire un graphe admissible, on observe d'abord que, pour tout $l \geq 1$, l'angle $\theta = 1/(d^l - 1)$ est, modulo 1, l -périodique par multiplication par d . D'après le théorème 2.4-a), le rayon $R_a(\theta)$ converge donc vers un point périodique x répulsif ou parabolique. En prenant l assez grand, on s'assure d'une part que l'orbite positive du point critique $-a$ est disjointe de celle de x et d'autre part que x est répulsif (en effet, f possède au plus une orbite périodique parabolique car tout orbite de ce type attire un point critique). Le théorème 2.4-b) fournit alors un rayon externe périodique $R(\eta)$ qui aboutit en x . Avec ces rayons, on forme *) le graphe admissible suivant :

$$\Gamma(\theta) = \partial X \cup \left(X \cap \left(\bigcup_{i \geq 0} \bar{R}_a(d^i \theta) \cup R((d+1)^i \eta) \right) \right).$$

Sur le cercle identifié à $[0, 1]/(0 \sim 1)$, les angles $d^i \theta$, $0 \leq i \leq l-1$, sont rangés en ordre croissant. On va maintenant vérifier que le graphe $\Gamma(\theta)$ satisfait les hypothèses du théorème 1.10.

On distingue deux types de pièces de profondeur 0 découpées par $\Gamma(\theta)$, selon que leur bord est formé, en dehors de ∂X , de quatre rayons — deux dans $B(a)$, deux dans $B(\infty)$ — ou simplement de deux rayons externes. Comme on s'intéresse surtout aux pièces du premier type, on appellera *losange* tout ouvert de $\widehat{\mathbb{C}}$ dont la frontière est l'adhérence d'exactement quatre rayons d'angles rationnels dont deux sont dans $B(a)$ et les deux autres dans $B(\infty)$. Les propriétés suivantes sont immédiates :

- 1) tout losange rencontre $B(a) \setminus \{a\}$ suivant une partie stricte;
- 2) si U et V sont deux losanges tels que $\bar{U} \cap \bar{V} \cap B(a) = \{a\}$, alors $\bar{U} \cap \bar{V} = \{a, \infty\}$;
- 3) l'union de deux losanges qui s'intersectent est soit un losange, soit $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, \infty\}$;
- 4) si U et V sont deux losanges tels que $f(\partial U) = \partial V$, $f(U)$ rencontre $V \cap B(a)$ et si U intersecte $B(a)$ dans un secteur angulaire d'ouverture strictement inférieure à $1/d$ (i.e. si $\theta_1 < \theta_2$ sont les arguments des rayons de $\partial U \cap B(a)$ alors $\theta_2 - \theta_1 < 1/d$), alors $U \cap \bar{B}(a) \subset f^{-1}(V)$.

Pour le point 4), il suffit de voir que $U \cap B(a)$ ne coupe pas de préimages du bord de V . Ceci découle du fait que l'ouverture angulaire est trop petite pour intersecter $f^{-1}(\partial V) \cap B(a)$, puisque ∂U est déjà dans $f^{-1}(\partial V)$. Par suite, f envoie $U \cap B(a)$ dans $V \cap B(a)$, d'où l'affirmation.

*) Souvent, par abus de langage, on dira qu'un rayon fait partie de l'adhérence ou du bord d'une pièce si cet ensemble contient au moins deux points du rayon. D'autre part, par extension, on appellera encore rayon toute préimage itérée d'un rayon de $B(a)$.

On note $\Gamma_1(\theta)$ le graphe $f^{-1}(\Gamma(\theta))$. Les rayons de $B(a)$ qui font partie de $\Gamma_1(\theta) \setminus \Gamma(\theta)$ ont pour angles les $d^i\theta + (j/d)$, $0 \leq i \leq l-1$, $1 \leq j \leq d-1$, qui sont tous dans l'intervalle du cercle contenant 0 et délimité par $\theta + (1/d)$ et θ/d (voir la figure 2). On se donne d'autre part un losange $U(\theta)$ qui contient $R_a(0) \setminus \{a\}$ et est bordé par $R_a(\theta + (1/d))$, $R_a(\theta/d)$ et deux rayons externes faisant partie de $\Gamma_1(\theta)$.

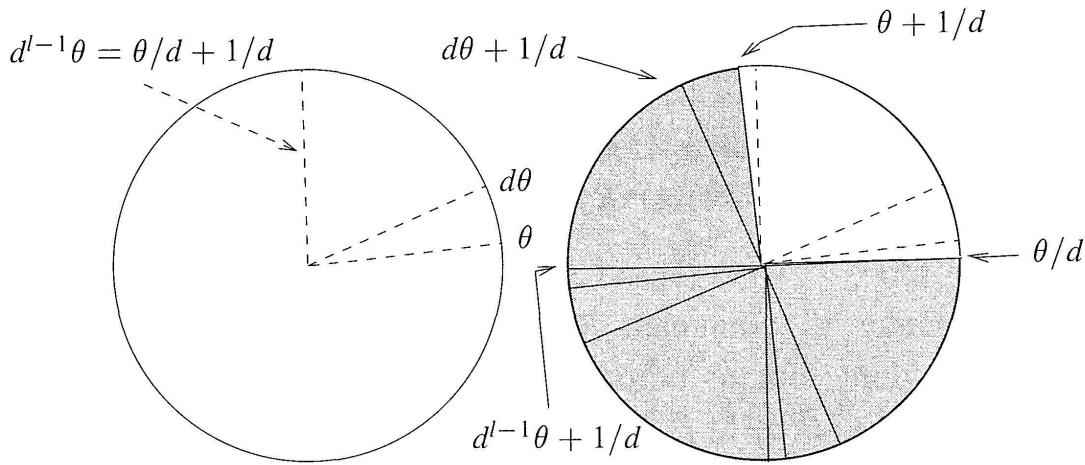


FIGURE 2

Le cas $d = 4$, $l = 3$ vu dans **D** via ϕ_a avec, en pointillés, $B(a) \cap \Gamma(\theta)$, en continu, $B(a) \cap (\Gamma_1(\theta) \setminus \Gamma(\theta))$ et, en gris, $U(\theta) \cap B(a)$

LEMME 2.8. *Tout point de $J(f) \cap (U(\theta) \setminus \Gamma_1(\theta))$ est bagué par $\Gamma(\theta)$ à la profondeur 0.*

Preuve. L'intersection $U(\theta) \cap X'$, qui est une union de pièces de profondeur 1, est relativement compacte dans la pièce de profondeur 0 qui rencontre $R_a(0)$ et qu'on note P_0 (voir la figure 2). En effet, P_0 est la trace sur X d'un losange \widehat{P}_0 bordé dans $B(a)$ par $R_a(\theta)$ et $R_a(\theta/d + 1/d)$. Comme $1 > \theta + 1/d > \theta/d + 1/d$ et $0 < \theta/d < \theta$, l'intersection $\overline{U}(\theta) \cap (\mathbf{C} \setminus \widehat{P}_0) \cap B(a)$ est réduite à a . Par suite, $\overline{U}(\theta)$ et $\mathbf{C} \setminus \widehat{P}_0$ ne se touchent qu'en a — propriété 2) des losanges. Ainsi, $\overline{U}(\theta) \cap \overline{X}' \subset P_0$. \square

LEMME 2.9. *Soit $\theta = 1/(d^l - 1)$ et $\theta' = 1/(d^{l'} - 1)$ avec $l' > l + 1$ et l assez grand. Tout point de $\partial B(a)$ est bagué à une profondeur bornée par l'un des graphes $\Gamma(\theta)$ ou $\Gamma(\theta')$.*

Preuve. On remarque tout d'abord que

$$\left((U(\theta) \setminus \Gamma_1(\theta)) \cup (U(\theta') \setminus \Gamma_1(\theta')) \right) \cap X' = (U(\theta) \cup U(\theta')) \cap X'$$

car les graphes $\Gamma_1(\theta)$ et $\Gamma_1(\theta')$ sont disjoints dans X' . Par suite, il suffit de montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\bigcup_{0 \leq i \leq n} f^{-i}(U(\theta) \cup U(\theta'))$ contienne $\partial B(a)$.

L'ouvert $U(\theta) \cup U(\theta')$ est un losange que l'on note V_0 , les rayons de $B(a)$ inclus dans ∂V_0 sont d'angles $\eta = \theta' + 1/d$, $\zeta = \theta/d$. On note n le plus petit entier tel que $\eta/d^n < \zeta$, on va construire, pour $0 \leq m \leq n$, un ouvert V_m ayant les propriétés suivantes :

- $V_m \cap \partial B(a)$ est inclus dans $\bigcup_{0 \leq i \leq m} f^{-i}(V_0)$;
- V_m , pour $m < n$, est un losange qui contient $R_a(1/d^m)$ et est bordé dans $B(a)$ par $R_a(\eta/d^m)$ et $R_a(\zeta)$;
- $V_n = \mathbf{C} \setminus \{a\}$.

Il existe un losange V'_1 contenant $R_a(1/d)$ et bordé dans $B(a)$ par $R_a(\eta/d)$, $R_a(\zeta/d + 1/d)$, dont tout le bord est inclus dans $f^{-1}(\partial V_0)$. Alors, d'après la propriété 4), $V'_1 \cap \bar{B}(a) \subset f^{-1}(V_0)$. Comme $\zeta/d + 1/d > \eta$, les losanges V'_1 et V_0 s'intersectent et $V_1 = V_0 \cup V'_1$ est un losange ayant les propriétés demandées. On construit de même un losange V'_m pour tout $m \leq n$ et on pose $V_m = V'_m \cup V_{m-1}$. \square

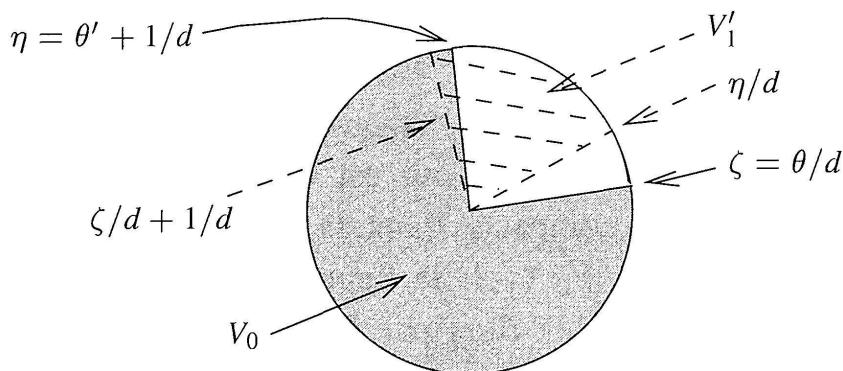


FIGURE 3
Illustration de la démonstration du lemme 2.9

REMARQUES.

a) Toutes les constructions précédentes et en particulier les lemmes 2.8 et 2.9 restent évidemment valables si on prend des graphes d'angle opposé *i.e.* d'angle $1 - \theta$ avec θ toujours de la forme $1/(d^l - 1)$.

b) La profondeur à laquelle on parvient à baguer les points de $\partial B(a)$ est bornée indépendamment du point considéré, mais croît avec l et l' . Ce fait est

insignifiant puisque l'on obtient finalement, d'après le lemme 1.12, que tout point de $\partial B(a)$ est infiniment bagué par un graphe $\Gamma(\theta)$ avec $\theta = 1/(d^l - 1)$ et l assez grand.

D'après la remarque b) précédente, il reste à baguer le point critique $-a$ (qui se trouve dans $K(f)$) et conclure par le théorème 1.10. On a le lemme suivant :

LEMME 2.10. *Il existe $l_0 \in \mathbf{N}$ et $\delta \in \{\pm 1\}$ dépendant uniquement de a tels que pour tout $l > l_0$, le point critique libre $-a$ est bagué à la profondeur 0 ou 1 par $\Gamma(\delta\theta)$ où θ est de la forme $1/(d^l - 1)$.*

On assimile dans cet énoncé $-\theta$ et $1 - \theta$.

Preuve. Pour $d > 2$, et l assez grand, l'ensemble $U(\theta)$ contient tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [1/2, 1]$ et $U(1 - \theta)$ tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [0, 1/2]$. De ce fait, $U(\theta) \cup U(1 - \theta)$ contient $B(a) \setminus \{a\}$; c'est donc $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ en vertu des propriétés 1) et 3) des losanges. De plus, comme les graphes sont admissibles (on prend l_0 grand dans ce but), $-a$ n'est sur aucun graphe de profondeur 1. Ceci résout le cas $d > 2$.

Pour $d = 2$, l'ouvert $U(\theta) \cup U(1 - \theta)$ ne recouvre plus $B(a)$. Néanmoins, pour tout $l > -\log \varepsilon / \log d$ où ε est un rationnel petit, $U(\theta)$ contient tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [1/2 + \varepsilon, 1]$ et $U(1 - \theta)$ tous les rayons $R_a(t)$, $t \in [0, 1/2 - \varepsilon]$. On suppose donc désormais que le point critique $-a$ est dans un losange V bordé par $R_a(1/2 + \varepsilon)$, $R_a(1/2 - \varepsilon)$ et contenant $R_a(1/2)$. Pour voir que $-a$ est bagué à la profondeur 1, comme a priori il se peut que V contienne une partie d'une préimage de $B(a)$, on va montrer que la valeur critique $f(-a)$ est baguée à la profondeur 0 et plus précisément qu'elle se trouve dans $\mathbf{C} \setminus V \subset U(\theta) \cup U(1 - \theta)$.

On suppose donc que $f(-a)$ est dans V , qui est un disque. Comme f est de degré 3 et que $-a$ est simple, $f^{-1}(V)$ est formé de deux disques et ceux-ci ne touchent pas $f^{-1}(\partial V)$. Or il y a deux losanges V_1 , V_2 évidents qui ont leur bord inclus dans $f^{-1}(\partial V)$, contiennent respectivement $R_a(1/4)$, $R_a(3/4)$ et vérifient

$$R_a\left(\frac{1}{4} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \partial V_1 \quad \text{et} \quad R_a\left(\frac{3}{4} \pm \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \partial V_2.$$

Par suite, les deux composantes de $f^{-1}(V)$ sont incluses dans $V_1 \cup V_2$ qui contient donc $-a$ et est disjoint de V . \square

En résumé, les lemmes 2.9, 2.10 et 1.12 garantissent que, pour tout point x de $\partial B(a)$, l'un des graphes $\Gamma(\theta)$, ou $\Gamma(1 - \theta)$ bague infiniment x et bague le point critique $-a$. Le théorème de Yoccoz 1.10 et le lemme 2.11 ci-dessous assurent alors que $\partial B(a)$ est localement connexe en x ce qui achève la preuve du théorème 2.1, sauf dans le cas où le bout de $-a$ est périodique et si x tombe dans $\text{Imp}(-a)$ par itération. C'est ce cas qu'il reste à étudier dans la partie suivante 2.5.

Pour trouver des voisinages connexes d'un point x de $\partial B(a)$, on va extraire de chaque intersection $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ un voisinage connexe de x dans $\partial B(a)$ qui est de la forme $\bigcap_{u \in]0, 1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau')$ avec $\tau, \tau' \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où

$$Q(u, \tau, \tau') = \{\phi_a(r e^{2i\pi t}) \mid r \in]u, 1[, t \in]\tau, \tau'[\}.$$

LEMME 2.11. *Tout point x de $\partial B(a)$ dont l'impression $\bigcap_{n \geq 0} P_n(x)$ est réduite à x possède un système fondamental de voisinages connexes dans $\partial B(a)$.*

Preuve. Toute pièce de profondeur n rencontre $B(a)$ suivant des secteurs du type $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau')$ car son bord est formé, dans $B(a)$, (de morceaux) de rayons rationnels et de l'équipotentielle de niveau $2^{-1/d^n}$. Par ailleurs, comme x appartient à $P_n(x) \cap \partial B(a)$, il possède un voisinage dans $P_n(x)$ qui rencontre $B(a)$. Ce voisinage rencontre alors un secteur $Q(2^{-1/d^n}, \tau, \tau') \subset P_n(x) \cap B(a)$ où $R_a(\tau), R_a(\tau')$ font partie de $\partial P_n(x)$. Ainsi, l'intersection

$$U_n = \bigcap_{u \in]0, 1[} \bar{Q}(u, \tau, \tau') \subset \bar{P}_n(x)$$

est un voisinage de x dans $\partial B(a)$, compact et connexe (c'est une intersection décroissante de parties compactes connexes). Comme l'intersection des pièces $P_n(x)$ se réduit au point x , la suite U_n constitue un système fondamental de voisinages connexes de x dans $\partial B(a)$. \square

2.5 CAS D'UN BOUT CRITIQUE PÉRIODIQUE

On considère à présent le graphe Γ parmi $\Gamma(\theta)$ et $\Gamma(1 - \theta)$ qui bague le point critique libre $-a$ (à la profondeur 0 ou 1) et on suppose que le bout de $-a$ est k -périodique. D'après le théorème de Yoccoz 1.10, l'application $f^k: P_{m+k}(-a) \rightarrow P_m(-a)$ est à allure quadratique — pour un entier m assez grand — et son ensemble de Julia rempli K est l'impression $\text{Imp}(-a) = \bigcap_{n \geq 0} P_n(-a)$. Deux cas se présentent alors. Si $\bar{B}(a)$ n'intersecte pas K , la connexité locale de $\partial B(a)$ découle encore une fois du théorème de

Yoccoz 1.10 et du lemme 2.11, car aucun point de $\partial B(a)$ ne tombe dans K par itération et toutes les impressions sont donc réduites à des singletons. Sinon, on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point (lemme 2.13) qui est un point fixe par f^k noté β . Il en résulte que, si l'orbite d'un point $x \in \partial B(a)$ passe dans K , la suite des parties $\bar{P}_n(x) \cap \partial B(a)$ forme, dans $\partial B(a)$, un système fondamental de voisinages de x puisque leur intersection est réduite à une préimage itérée de $\partial B(a) \cap K \subset \{\beta\}$. Le lemme 2.11 permet alors de conclure que $\partial B(a)$ est localement connexe en x . Ce qui achève la preuve du théorème 2.1.

Dorénavant, on suppose que $K \cap \partial B(a) \neq \emptyset$ et dans la fin de cet article on montre que $\partial B(a) \cap K$ est formé d'au plus un point. Dans un premier temps, on trouve un point répulsif ou parabolique dans $K \cap \partial B(a)$:

LEMME 2.12. *Il existe dans $B(a)$ un rayon $R_a(\eta)$ qui est k -périodique par f et aboutit en un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ — fixe par f^k .*

Preuve. On reprend les notations données juste avant le lemme 2.11. On montre tout d'abord (par récurrence sur n) que, si une pièce P_n de profondeur n rencontre $B(a)$, l'intersection $P_n \cap B(a)$ est formée d'un seul secteur du type $Q(u, \tau, \tau')$, où l'intervalle $]\tau, \tau'[$ du cercle a une longueur strictement inférieure à $1/d^{n+1}$.

Une pièce P_0 de profondeur 0 a clairement cette propriété. D'autre part, toute pièce P_{n+1} de profondeur $n+1$ est contenue dans une pièce P'_n de profondeur n et a pour image par f une (autre) pièce P_n de profondeur n . Par hypothèse de récurrence, $P_n \cap B(a)$ est du type $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$, avec $|\tau'_n - \tau_n| < 1/d^{n+1}$. L'ouvert $Q(u_n, \tau_n, \tau'_n)$ a donc d préimages dans $B(a)$, qui sont de la forme

$$Q\left(u, \tau + \frac{i}{d}, \tau' + \frac{i}{d}\right), \quad 0 \leq i \leq d-1,$$

où $u = u_n^{1/d}$ et $|\tau' - \tau| < 1/d^{n+2}$. L'intersection $P_{n+1} \cap B(a)$ coïncide alors avec l'un de ces secteurs ouverts : elle en contient un tout entier car elle est bordée par des rayons préimages de ceux qui bordent P_n et elle ne peut en contenir deux car deux tels secteurs diffèrent de $1/d$ alors que la pièce $P'_n \supset P_{n+1}$ rencontre $B(a)$ dans un secteur d'ouverture $< 1/d$ (hypothèse de récurrence). On choisit alors τ, τ' pour que

$$P_{n+1} \cap B(a) = Q(u, \tau, \tau').$$

Soit maintenant x un point de $K \cap \partial B(a)$. S'il se trouve sur une préimage Γ_n du graphe Γ , c'est immédiatement le point d'aboutissement d'un rayon

prépériodique de $B(a)$. En prenant son image par un itéré convenable de f , on obtient un rayon périodique qui converge vers un point $\beta \in K \cap \partial B(a)$ fixe par f^k . Si x n'est sur aucune préimage du graphe, la pièce $P_n(x)$ rencontre $B(a)$ suivant un secteur de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau'_n)$ avec $|\tau_n - \tau'_n| < 1/d^n$. Les angles $(\tau_n), (\tau'_n)$ forment des suites adjacentes dont on note η la limite commune. Comme $x \in K \subset P_n(-a)$, nécessairement $P_n(x) = P_n(-a)$ et, de ce fait,

$$f^k(P_{n+k}(x) \cap B(a)) = P_n(x) \cap B(a)$$

pour n assez grand. Par suite, $d^k\eta$ est dans l'intervalle $]\tau_n, \tau'_n[\subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, de sorte que $d^k\eta = \eta$. Le rayon d'angle η converge alors vers un point β (théorème 2.4). Ce point β est fixe par f^k et, comme il se trouve dans toutes les pièces $P_n(-a)$, il est dans $K \cap \partial B(a)$. \square

LEMME 2.13. *Il existe deux rayons externes $R(\zeta), R(\zeta')$, d'angles ζ, ζ' rationnels, qui aboutissent au point β et sont tels que la courbe de Jordan $R(\zeta) \cup R(\zeta') \cup \{\beta\}$ sépare $K \setminus \{\beta\}$ de $\bar{B}(a) \setminus \{\beta\}$.*

Preuve. Dans la preuve du lemme 2.12, on a vu que $P_n(-a) \cap B(a)$ est de la forme $Q(2^{-1/d^n}, \tau_n, \tau'_n)$. Les rayons $R_a(\tau_n), R_a(\tau'_n)$ convergent vers des points y_n, y'_n de $\partial B(a)$ en lesquels aboutissent aussi des rayons externes qui font partie de $\partial P_n(-a)$ et qu'on note respectivement $R(\zeta_n), R(\zeta'_n)$. La suite ζ_n (resp. ζ'_n) est alors croissante majorée (resp. décroissante minorée) et converge donc vers un angle limite ζ (resp. ζ'). De plus, comme f^k est un homéomorphisme local en les points y_n, y'_n et que $f^k(\bar{P}_{n+k}(-a)) = \bar{P}_n(-a)$ pour n assez grand,

$$f^k(R(\zeta_{n+k})) = R(\zeta_n), \quad \text{et} \quad f^k(R(\zeta'_{n+k})) = R(\zeta'_n).$$

Il en résulte que $(d+1)^k \zeta_{n+k} = \zeta_n$ (dans \mathbf{R}/\mathbf{Z}) et, par suite, que ζ est périodique de période divisant k . Les rayons $R(\zeta), R(\zeta')$ convergent ainsi vers des points y, y' qui sont fixes par f^k et qui appartiennent à K — car la partie des rayons $R(\zeta), R(\zeta')$ située au-delà du potentiel $2^{-1/d^n}$ se trouve dans $\bar{P}_n(-a)$.

D'autre part, le théorème de redressement de A. Douady et J. H. Hubbard [DH2, théorème 1] montre que f^k est conjuguée à un polynôme quadratique $f_c(z) = z^2 + c$ par un homéomorphisme σ d'un voisinage de K sur un voisinage de l'ensemble de Julia rempli K_c de f_c . Les points $\sigma(\beta), \sigma(y)$ et $\sigma(y')$ sont des points fixes de f_c en lesquels aboutissent des arcs externes fixes par f_c — à savoir $\sigma(R_a(\eta)), \sigma(R(\zeta))$ et $\sigma(R(\zeta'))$. Or un polynôme quadratique possède au plus deux points fixes parmi lesquels un seul — généralement

noté β_c — est l'aboutissement d'un arc externe fixe [P, théorème A]. Par suite, $R(\zeta)$, $R(\zeta')$ convergent nécessairement vers β .

Finalement, $\bar{R}(\zeta) \cup \bar{R}(\zeta')$ forme une courbe de Jordan qui sépare $K \setminus \{\beta\}$ de $\bar{B}(a) \setminus \{\beta\}$. En effet, le losange V_n bordé par $\bar{R}_a(\tau_n)$, $\bar{R}_a(\tau'_n)$, $\bar{R}(\zeta_n)$ et $\bar{R}(\zeta'_n)$ contient la pièce $P_n(-a)$ par construction. Il contient donc K et, par suite, au moins un point périodique répulsif p (différent de β) et un rayon externe qui converge vers p , de sorte que $\zeta \neq \zeta'$. Ainsi, la composante connexe U de $\mathbb{C} \setminus (\bar{R}(\zeta) \cup \bar{R}(\zeta'))$ qui contient p contient $K \setminus \{\beta\}$ — car K ne peut rencontrer la courbe $\bar{R}(\zeta) \cup \bar{R}(\zeta')$ qu'en β et ce point ne disconnecte pas K [M, théorème 6.10]. \square

RÉFÉRENCES

- [A] AHLFORS, L. V. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, California, 1987 *).
- [B] BÖTTCHER, L. Les lois principales de la convergence des itérés et leur application en analyse (en russe). *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obshch.* 14 (1904), 155–234.
- [BH] BRANNER, B. and J. H. HUBBARD The iteration of cubic polynomials II, patterns and parapatterns. *Acta Math.* 169 (1992), 229–325.
- [C] CARATHÉODORY, C. Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. *Math. Ann.* 73 (1913), 323–370.
- [DH1] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD *Étude dynamique des polynômes complexes*. Publ. math. d'Orsay, 1984.
- [DH2] DOUADY, A. et J. H. HUBBARD On the dynamics of polynomial-like mappings. *Ann. sci. École Norm. Sup. (4)* 18 (1985), 287–343.
- [F] FATOU, P. Sur les équations fonctionnelles (trois mémoires). *Bull. Soc. Math. France* 47 (1919), 161–271, 48 (1920), 33–94 et 208–314.
- [Fa] FAUGHT, D. Local connectivity in a family of cubic polynomials. Thèse de l'Université de Cornell, 1992.
- [H] HUBBARD, J. H. Local connectivity of Julia sets and bifurcation loci: three theorems of J.-C. Yoccoz. In: *Topological Methods in Modern Mathematics*, L. R. Goldberg and A. V. Phillips eds, 467–511. Publish or Perish, Houston, 1993.
- [J] JULIA, G. Mémoire sur l'itération des applications fonctionnelles. *J. Math. Pures Appl.* 8 (1918), 47–245.
- [M] McMULLEN, C. *Complex Dynamics and Renormalization*. Annals of Mathematics Studies 135. Princeton University Press, Princeton, 1994.

*) Réimpression du manuscrit *Lectures on Quasiconformal Mappings*. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 10 D. Van Nostrand Co., Inc., Toronto, Ont.–New York–London, 1966.

- [M1] MILNOR, J. *Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures*. IMS Preprint, SUNY Stony Brook, 1990.
- [M2] —— *Local Connectivity of Julia Sets: Expository Lectures*. IMS Preprint, SUNY Stony Brook, 1992.
- [P] PETERSEN, C. L. On the Pommerenke-Levin-Yoccoz inequality. *Ergodic Theory and Dynam. Systems* 13 (1993), 785–806.
- [R] ROESCH, P. Topologie locale des méthodes de Newton cubiques. Thèse de l'ENS de Lyon, 1997.
- [S] SULLIVAN, D. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. *Ann. of Math.* 122 (1985), 401–418.
- [TY] TAN, L. and Y. YIN. Local connectivity of the Julia set for geometrically finite rational maps. *Sci. China Ser. A* 39 (1996), 39–47.

(Reçu le 8 octobre 1998)

P. Roesch

Université de Lille I
UFR de Mathématiques
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France