

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 45 (1999)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** COUNTING PATHS IN GRAPHS  
**Autor:** Bartholdi, Laurent

**Kurzfassung**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-64442>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## COUNTING PATHS IN GRAPHS

by Laurent BARTHOLDI

ABSTRACT. We give a simple combinatorial proof of a formula that extends a result by Grigorchuk [Gri78a, Gri78b] relating cogrowth and spectral radius of random walks. Our main result is an explicit equation determining the number of ‘bumps’ on paths in a graph: in a  $d$ -regular (not necessarily transitive) non-oriented graph let the series  $G(t)$  count all paths between two fixed points weighted by their length  $t^{\text{length}}$ , and  $F(u, t)$  count the same paths, weighted as  $u^{\text{number of bumps}} t^{\text{length}}$ . Then one has

$$\frac{F(1-u, t)}{1-u^2 t^2} = \frac{G\left(\frac{t}{1+u(d-u)t^2}\right)}{1+u(d-u)t^2}.$$

We then derive the circuit series of ‘free products’ and ‘direct products’ of graphs. We also obtain a generalized form of the Ihara-Selberg zeta function [Bas92, FZ98].

### 1. INTRODUCTION

Let  $\Gamma = \mathbf{F}_S/N$  be a group generated by a finite set  $S$ , where  $\mathbf{F}_S$  denotes the free group on  $S$ . Let  $f_n$  be the number of elements of the normal subgroup  $N$  of  $\mathbf{F}_S$  whose minimal representation as words in  $S \cup S^{-1}$  has length  $n$ ; let  $g_n$  be the number of (not necessarily reduced) words of length  $n$  in  $S \cup S^{-1}$  that evaluate to 1 in  $\Gamma$ ; and let  $d = |S \cup S^{-1}| = 2|S|$ . The numbers

$$\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f_n}, \quad \nu = \frac{1}{d} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{g_n}$$

are called the *cogrowth* and *spectral radius* of  $(\Gamma, S)$ . The Grigorchuk Formula [Gri78b] states that

$$(1.1) \quad \nu = \begin{cases} \frac{\sqrt{d-1}}{d} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{d-1}} + \frac{\sqrt{d-1}}{\alpha} \right) & \text{if } \alpha > \sqrt{d-1}, \\ \frac{2\sqrt{d-1}}{d} & \text{else.} \end{cases}$$