Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 45 (1999)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RETOUR SUR UN THÉORÈME DE CHEVALLEY

Autor: Luna, D.

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-64453

que $\lambda(t)v_i = t^{n_i}v_i$. Désignons par $V^\star$ l'espace vectoriel dual de V, et par $v_1^\star, \dots, v_d^\star$ la base duale de $V^\star$. Comme on suppose que X n'est contenu dans aucun $\mathbf{P}(W)$, W sous-espace linéaire propre de V, il existe $[v] \in X(\lambda, p^\circ)$ tel que $\langle v, v_i^\star \rangle \neq 0$ quel que soit $i = 1, \dots, d$. On en déduit que $n_1 < n_i$ $(i \geq 2)$, et que $X(\lambda, p^\circ) = \{[v] \in X \mid \langle v, v_1^\star \rangle \neq 0\}$. En particulier $X(\lambda, p^\circ)$ est un ouvert affine de X.

Montrons que $X(\lambda, p^\circ)$ est stable par C. Désignons par $v_1^\perp$ l'hyperplan de $V^\star$ orthogonal à v_1. Le groupe G opère aussi dans $V^\star$ et $\mathbf{P}(V^\star)$. Si $G \cdot w$ est une orbite de G contenue dans $v_1^\perp$, alors w est orthogonal à tout vecteur de $G \cdot v_1$, donc $w = 0$ (car $G \cdot v_1$ engendre V comme espace vectoriel). Par conséquent, toute orbite de G dans $\mathbf{P}(V^\star)$ rencontre $\mathbf{P}(V^\star) \setminus \mathbf{P}(v_1^\perp)$. Puisque $\lambda(t)v_i^\star = t^{-n_i}v_i^\star$ $(i = 1, \dots, d)$, tout $y \in \mathbf{P}(V^\star) \setminus \mathbf{P}(v_1^\perp)$ vérifie $\lim_{t \to \infty} \lambda(t) \cdot y = [v_1^\star]$, d'où il suit que l'orbite $G \cdot [v_1^\star]$ est fermée dans $\mathbf{P}(V^\star)$. Notons P le groupe d'isotropie de G en $[v_1^\star]$. Comme P est parabolique et contient T, P contient un $B \in \mathbf{B}^T$. Par suite C est contenu dans P. Comme C est unipotent, il fixe non seulement $[v_1^\star]$ mais aussi $v_1^\star$. Puisque $X(\lambda, p^\circ) = \{[v] \in X \mid \langle v, v_1^\star \rangle \neq 0\}$, il s'ensuit bien que $X(\lambda, p^\circ)$ est stable par C.

Enfin, on a $X(\lambda, p^\circ) = X(p^\circ)$ (en effet $X(\lambda, p^\circ) \subset X(p^\circ)$ est vrai par définition, et l'autre inclusion vient du fait que $X(\lambda, p^\circ)$ est ouvert, stable par T, et contient p°). Le groupe $N_G(T)$, qui opère transitivement dans X^T, permute les $X(p)$ $(p \in X^T)$. Par ailleurs, $N_G(T)$ normalise visiblement C. Par conséquent, tous les $X(p)$ $(p \in X^T)$ sont des ouverts affines de X, stables par C. □

REMARQUE. Un peu plus loin dans la théorie, on peut montrer que les $X(\lambda, p)$ $(p \in X^T)$ ci-dessus sont en fait les cellules de la « décomposition de Bruhat » (voir [Bo] § 14 et [Sp] chap. 8). Les $X(p)$ $(p \in X^T)$ ne sont donc rien d'autre que les « grosses cellules » associées aux différents $B \in \mathbf{B}^T$.

RÉFÉRENCES

[Bo] BOREL, A. *Linear Algebraic Groups.* Second Enlarged Edition, Springer-Verlag (1991).

[B-B] BIAŁYNICKI-BIRULA, A. Some theorems on actions of algebraic groups. *Ann. of Math. 98* (1973), 480–497.

[Ch] CHEVALLEY, C. *Classification des groupes de Lie algébriques.* Séminaire de l'École Normale Supérieure, Paris, 1956–1958.

[Do] DOKOVIC, D. Z. An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups. *L'Enseignement Mathématique 34* (1988), 269–273.

[Sp] SPRINGER, T. A. *Linear Algebraic Groups.* Second Edition, Birkhäuser (1998).

(Reçu le 15 avril 1999)

D. Luna

Institut Fourier
B.P. 74
F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
France