L'Enseignement Mathématique, t. 45 (1999), p. 301–309

UNE MAJORATION DE LA LONGUEUR DES POLYNÔMES CYCLOTOMIQUES

par Jean-Louis NICOLAS et Guy TERJANIAN [1]

ABSTRACT. Let us denote by $\beta(m)$ the length of Φ_m, the m-th cyclotomic polynomial, i.e. the sum of the absolute values of its coefficients. We shall prove that for $m \geq 7$ and $m \neq 10$ the following inequality holds: $\beta(m) \leq (\sqrt{2})^{\varphi(m)}$, where φ is the Euler function.

Further, define $P_m(X) = \Phi_m(X) - (X-1)^{\varphi(m)}$ for $m \geq 2$. We shall deduce from the above inequality that if this polynomial vanishes at some root of unity, then this root of unity is of order 6.

1. INTRODUCTION

Nous noterons φ la fonction d'Euler, μ la fonction de Möbius et Φ_m le m-ième polynôme cyclotomique. On sait que ce polynôme vérifie

$$\Phi_m(X) = \prod_{d \mid m} (1 - X^{m/d})^{\mu(d)} . \tag{1}$$

Nous définissons les coefficients de Φ_m par

$$\Phi_m(X) = a_{m,0} + a_{m,1}X + \cdots + a_{m,\varphi(m)}X^{\varphi(m)} , \tag{2}$$

et nous posons

$$\beta(m) = |a_{m,0}| + |a_{m,1}| + \cdots + |a_{m,\varphi(m)}| .$$

Bateman a donné dans [1] une démonstration très élégante de la majoration

$$\beta(m) \leq m^{\frac{1}{2}d(m)} \tag{3}$$

[1]) Recherche partiellement financée par le CNRS, Institut Girard Desargues, UPRES-A 5028 et Laboratoire Émile Picard, UMR 5580.