

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THE COMPLEX GEOMETRY OF THE LAGRANGE TOP
Autor: Gavrilov, Lubomir / ZHIVKOV, Angel

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63901>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

the original system (2) which establishes once again Theorem A.2, (ii). It is easy to see, however, that the above approach does not work as for $\epsilon \neq 0$ the Lax pair (64) *does not define a differential equation*. Indeed, note that (64) is equivalent to the Lax pair

$$(66) \quad \frac{dA^0}{dt} = [A^0, B^0] - \frac{\epsilon h}{I_1} \begin{pmatrix} 0 & y & i\bar{y} \\ -\bar{y} & i\gamma_3 & 0 \\ iy & 0 & -i\gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Its (1, 2) entry is computed to be

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{i}{I_1} (yI_3\Omega_3 - x\gamma_3 + hz_0I_1y) - \frac{\epsilon h y}{I_1}$$

and the (3, 1) entry is

$$i \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{I_1} (-yI_3\Omega_3 + x\gamma_3 - hz_0I_1y) + \frac{\epsilon^3 h y}{I_1},$$

so $y \equiv 0$ and in a similar way $\bar{y} \equiv 0$.

More generally, it is seen from the coefficients of the spectral curve X_ϵ , $\epsilon \neq 0$, that the functions

$$\Omega_1^2 + \Omega_2^2, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad \Omega_1\gamma_1 + \Omega_2\gamma_2, \quad \gamma_3, \quad \Omega_3$$

are invariants for *any* isospectral deformation of the matrix A^ϵ . By continuity these five functions are invariants for $\epsilon = 0$ too, so the vector field in \mathbf{C}^6 obtained as $\epsilon \rightarrow 0$ is collinear to the linear vector field of (3). Of course there is no analytic change of variables in \mathbf{C}^6 which sends the orbits of (3) to orbits of (2).

REFERENCES

- [1] ADLER, M. and P. VAN MOERBEKE. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. *Advances in Math.* 38 (1980), 318–379.
- [2] AUDIN, M. and R. SILHOL. Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski. *Compositio Math.* 87 (1993), 153–229.
- [3] AUDIN, M. *Spinning Tops*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 51, Cambridge, 1996.
- [4] BATEMAN MANUSCRIPT PROJECT, A. Erdély (ed.). *Higher Transcendental Functions*, vol. II. McGraw-Hill, 1953.

- [5] BELOKOLOS, E.D., A.I. BOBENKO, V.Z. ENOL'SKIĬ, A.R. ITS and V.B. MATVEEV. *Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*. Springer, 1994.
- [6] BEAUVILLE, A. Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables. *Acta Math.* 164 (1990), 211–235.
- [7] DUBROVIN, B. A. Theta functions and non-linear equations. *Russ. Math. Surv.* 36, No. 2 (1981), 11–92 .
- [8] — Matrix finite zone operators. *J. Sov. Math.* 28 (1985), 20–50.
- [9] DUBROVIN, B. A., I. M. KRICHEVER and S. P. NOVIKOV. Integrable Systems, I. *Dynamical Systems IV*, 173–280. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 4* (V. I. Arnold, S. P. Novikov, eds.). Springer, 1990.
- [10] FAY, J. *Theta Functions on Riemann Surfaces*. Lect. Notes in Mathematics, no. 352. Springer, 1973.
- [11] GAVRILOV, L. and A. ZHIVKOV. The complex geometry of the Lagrange top. Preprint no. 61, Laboratoire Emile Picard, Université de Toulouse III, 1995.
- [12] GAVRILOV, L. Generalized Jacobians of spectral curves and completely integrable systems. *Math. Zeitschrift*, to appear.
- [13] GRIFFITHS, P. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry*. J. Wiley and Sons, 1978.
- [14] JACOBI, C. Sur la rotation d'un corps. *Gesammelte Werke, Bd 2*, 289–352. Chelsea, 1969.
- [15] — Fragments sur la rotation d'un corps tirés des manuscrits de Jacobi et communiqués par E. Lotner. *Gesammelte Werke, Bd 2*, 425–514. Chelsea, 1969.
- [16] KLEIN, F. and A. SOMMERFELD. *Theorie des Kreisels*. Teubner, Leipzig, 1897–1910.
- [17] LAGRANGE, J. L. *Mécanique Analytique*, 1788. *Œuvres de Lagrange, tome XII*. Gauthier-Villars, 1889.
- [18] MUMFORD, D. *Tata Lectures on Theta II*. Progress in Mathematics, vol. 43. Birkhäuser, 1984.
- [19] POISSON, D. Sur un cas particulier du mouvement de rotation des corps pesans. *J. de l'École Polytechnique, tome IX, seizième cahier*, 1813.
- [20] PREVIATO, E. Hyperelliptic quasi-periodic and soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation. *Duke Math. J.* 52 (1985), 329–377.
- [21] RATIU, T. and P. VAN MOERBEKE. The Lagrange rigid body motion. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 32 (1982), 211–234.
- [22] RATIU, T. Euler-Poisson equations on Lie algebras and the n -dimensional heavy rigid body. *Amer. J. of Math.* 104 (1982) 409–448 .
- [23] SERRE, J.-P. *Groupes algébriques et corps de classes*. Hermann, 1959.
- [24] VERDIER, J.-L. Algèbres de Lie, systèmes hamiltoniens, courbes algébriques. *Séminaire E.N.S. (1979–82)*. Progress in Mathematics, vol. 37. Birkhäuser (1983), 237–246.
- [25] WEIL, A. Remarques sur un mémoire d'Hermite. *Collected Papers, vol. 2*, 111–116.

- [26] WHITTAKER, E.T. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Bodies*. Cambridge Univ. Press, 1904.

(Reçu le 27 novembre 1997)

Lubomir Gavrilov

Laboratoire Émile Picard, CNRS UMR 5580
Université Toulouse III
118, route de Narbonne
F-31062 Toulouse Cedex
France
e-mail: gavrilov@picard.ups-tlse.fr

Angel Zhivkov

Faculty of Mathematics and Informatics
Sofia University
5 J. Bourchier
1164 Sofia
Bulgaria