Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PARTICULAR CASE OF DIRICHLET'S THEOREM ON ARITHMETIC PROGRESSIONS

Autor: Sedrakian, Naïri / Steinig, John

Bibliographie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63892

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

By (10), (11) and Lemma 1,

$$q \mid m^{(m,\,q-1)} - 1\,. \tag{12}$$

Suppose now that (8) does not hold. Then $(m, q-1) \mid \dfrac{m}{p_i}$ for some i, $1 \le i \le s$, whence by (12),

$$q \mid m^{m/p_i} - 1 \tag{13}$$

and therefore

$$\frac{m^m - 1}{m^{m/p_i} - 1} = \sum_{\nu=0}^{p_i-1} (m^{m/p_i})^\nu \equiv p_i \pmod q\,. \tag{14}$$

But (14) is impossible, for with (9) it implies that $p_i = q$, contradicting the fact that q does not divide m. This concludes the proof of the theorem.

REMARK. Several elementary proofs of this special case of Dirichlet's theorem are known; see [1], [2, §11.3], [4, §48], [5], [6], [7, §6.1A], [8, Ch. 6,5], [9], [10] and the references in [7, pp. 241–245]. They involve, more or less explicitly, the cyclotomic polynomials, say $\Phi_n(x)$. Although the proof we have given here does not require any knowledge of these polynomials, the integer N defined in (7) is in fact equal to $\Phi_m(m)$, as can be seen with Lemmas 1 and 2 and the identity [2, p. 181]

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} \left(x^{n/d} - 1\right)^{\mu(d)}\,,$$

where μ is the Möbius function (see also [4], §46).

REFERENCES

[1] ESTERMANN, T. Note on a paper of A. Rotkiewicz. *Acta Arithmetica 8* (1963), 465–467.

[2] HASSE, H. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* 2. Auflage. Springer-Verlag (Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York), 1964.

[3] LE BESGUE, V.-A. *Introduction à la théorie des nombres.* Mallet-Bachelier (Paris), 1862.

[4] NAGELL, T. *Introduction to Number Theory.* 2nd edition. Chelsea Publishing Co. (New York), 1964.

[5] NIVEN, I. and B. POWELL. Primes in certain arithmetic progressions. *Amer. Math. Monthly 83* (1976), 467–469.

[6] ROTKIEWICZ, A. Démonstration arithmétique de l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $nk+1$. *L'Enseignement Math. (2) 7* (1961), 277–280.

[7] SHAPIRO, H. N. *Introduction to the Theory of Numbers.* John Wiley & Sons, Inc. (New York), 1983.

[8] SIERPIŃSKI, W. *Elementary Theory of Numbers.* 2nd edition (ed. A. Schinzel). North-Holland (Amsterdam, New York, Oxford) and PWN (Warszawa), 1988.

[9] SCHUR, I. Über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in einigen speziellen arithmetischen Progressionen. *Sitzber. der Berliner Math. Ges. 11* (1912), 40–50. Reproduced in *Gesammelte Abhandlungen II* (ed. A. Brauer and H. Rohrbach), 1–11. Springer-Verlag (Berlin, Göttingen, New York), 1973.

[10] WENDT, E. Elementarer Beweis des Satzes, dass in jeder unbegrenzten arithmetischen Progression $my+1$ unendlich viele Primzahlen vorkommen. *J. für die reine und angewandte Math. 115* (1895), 85–88.

(Reçu le 30 juin 1997; version révisée reçue le 30 avril 1998)

Naïri Sedrakian

c/o Vardan Akopian
8, rue Francis de Croisset, A406
F-75018 Paris
France
e-mail: hakobian@ann.jussieu.fr

John Steinig

Section de mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH-1211 Genève 24
Switzerland

vide-leer-empty