Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE T^5
Autor: Hadjar, Amine
Rubrik
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63898

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 19.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

2. Posons $\omega_t = \omega_0 + t d\theta$, pour tout nombre réel t. Alors :

PROPOSITION. *Il existe un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour tout t, $|t| \leq \varepsilon$, la forme $\mathbf{T}^2$-invariante ω_t est de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. De plus, pour $1/2 < |t| \leq \varepsilon$, elle est transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$.*

Preuve. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\omega_t \wedge d\omega_t^2 &= -2(\cos^2\theta\,\cos^2\theta_1 + \sin^4\theta + 2\sin^2\theta\,\sin^2\theta_1 + \sin^4\theta_1 \\ &\qquad + t\cos\theta_1\,\sin\theta_1)\,d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \\ &= -(1 + t\sin 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta_1) + 6\sin^2\theta\,\sin^2\theta_1) \\ &\qquad d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4\end{aligned}$$

et que cette 5-forme est une forme volume sur $\mathbf{T}^5$ pour $|t| \leq 1$. La condition de contact étant ouverte, il existe alors un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour $|t| \leq \varepsilon$, la forme ω_t reste de contact sur le tore $\mathbf{T}^5$. La deuxième partie de la proposition est évidente.

3. La famille ω_t, avec $0 \leq t \leq \varepsilon$, est une isotopie de formes de contact $\mathbf{T}^2$-invariantes sur $\mathbf{T}^5$, qui joint ω_0 à ω_ε. Par conséquent, il existe une isotopie φ_t de difféomorphismes $\mathbf{T}^2$-équivariants du tore $\mathbf{T}^5$ telle que φ_0 est l'identité et $\omega_t \wedge \varphi_t^\star\,\omega_0 = 0$ pour tout t dans $[0, \varepsilon]$ (voir [2]).

Ainsi la structure de contact définie par ω_0 est transverse à la fibration en cercles $\mathbf{T}^5 \to \mathbf{T}^4$ dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs $(\varphi_1)_\star\,\partial/\partial\theta$. Ce qui constitue aussi une solution au problème.

4. Rappelons, d'une part, qu'une forme de contact sur $\mathbf{T}^5$ ne peut être $\mathbf{T}^3$-invariante (voir [2]).

D'autre part, une forme de contact ω sur le tore $\mathbf{T}^5$ ne peut être à la fois S^1-invariante (i.e. telle que $L_{\partial/\partial\theta}\,\omega = 0$) et partout transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$. Plus généralement, d'après [2], on a la

PROPOSITION. *Soit $M(B, S^1, q)$ un fibré principal dont la base est fermée, de dimension $2p$. Si sa classe caractéristique est nulle, il n'existe aucune forme de contact sur M, S^1-invariante et transverse aux fibres.*

Preuve. Soit Z le champ de vecteurs dont le flot engendre l'action de S^1 sur M. Supposons qu'il existe une forme de contact ω sur M, invariante par S^1 et transverse aux fibres. Alors $\alpha = \omega/\omega(Z)$ est une forme de connexion