

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE  $T^5$   
**Autor:** Hadjar, Amine  
**Rubrik**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63898>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

2. Posons  $\omega_t = \omega_0 + t d\theta$ , pour tout nombre réel  $t$ . Alors :

PROPOSITION. *Il existe un réel  $\varepsilon > 1$  tel que pour tout  $t$ ,  $|t| \leq \varepsilon$ , la forme  $\mathbf{T}^2$ -invariante  $\omega_t$  est de contact sur le tore  $\mathbf{T}^5$ . De plus, pour  $1/2 < |t| \leq \varepsilon$ , elle est transverse au champ de vecteurs  $\partial/\partial\theta$ .*

*Preuve.* Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \omega_t \wedge d\omega_t^2 &= -2(\cos^2 \theta \cos^2 \theta_1 + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 + \sin^4 \theta_1 \\ &\quad + t \cos \theta_1 \sin \theta_1) d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \\ &= -(1 + t \sin 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta_1) + 6 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1) \\ &\quad d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \end{aligned}$$

et que cette 5-forme est une forme volume sur  $\mathbf{T}^5$  pour  $|t| \leq 1$ . La condition de contact étant ouverte, il existe alors un réel  $\varepsilon > 1$  tel que pour  $|t| \leq \varepsilon$ , la forme  $\omega_t$  reste de contact sur le tore  $\mathbf{T}^5$ . La deuxième partie de la proposition est évidente.

3. La famille  $\omega_t$ , avec  $0 \leq t \leq \varepsilon$ , est une isotopie de formes de contact  $\mathbf{T}^2$ -invariantes sur  $\mathbf{T}^5$ , qui joint  $\omega_0$  à  $\omega_\varepsilon$ . Par conséquent, il existe une isotopie  $\varphi_t$  de difféomorphismes  $\mathbf{T}^2$ -équivalents du tore  $\mathbf{T}^5$  telle que  $\varphi_0$  est l'identité et  $\omega_t \wedge \varphi_t^* \omega_0 = 0$  pour tout  $t$  dans  $[0, \varepsilon]$  (voir [2]).

Ainsi la structure de contact définie par  $\omega_0$  est transverse à la fibration en cercles  $\mathbf{T}^5 \rightarrow \mathbf{T}^4$  dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs  $(\varphi_1)_* \partial/\partial\theta$ . Ce qui constitue aussi une solution au problème.

4. Rappelons, d'une part, qu'une forme de contact sur  $\mathbf{T}^5$  ne peut être  $\mathbf{T}^3$ -invariante (voir [2]).

D'autre part, une forme de contact  $\omega$  sur le tore  $\mathbf{T}^5$  ne peut être à la fois  $S^1$ -invariante (i.e. telle que  $L_{\partial/\partial\theta} \omega = 0$ ) et partout transverse au champ de vecteurs  $\partial/\partial\theta$ . Plus généralement, d'après [2], on a la

PROPOSITION. *Soit  $M(B, S^1, q)$  un fibré principal dont la base est fermée, de dimension  $2p$ . Si sa classe caractéristique est nulle, il n'existe aucune forme de contact sur  $M$ ,  $S^1$ -invariante et transverse aux fibres.*

*Preuve.* Soit  $Z$  le champ de vecteurs dont le flot engendre l'action de  $S^1$  sur  $M$ . Supposons qu'il existe une forme de contact  $\omega$  sur  $M$ , invariante par  $S^1$  et transverse aux fibres. Alors  $\alpha = \omega/\omega(Z)$  est une forme de connexion