

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE ST^5
Autor: Hadjar, Amine
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63898>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 14.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES STRUCTURES DE CONTACT DU TORE \mathbf{T}^5

par Amine HADJAR *)

ABSTRACT. We give an example of a \mathbf{T}^2 -invariant contact form on \mathbf{T}^5 which is transversal to the trivial fibration with circles over \mathbf{T}^4 .

RÉSUMÉ. On donne un exemple de forme de contact sur le tore \mathbf{T}^5 , \mathbf{T}^2 -invariante et transverse à la fibration triviale en cercles au dessus du tore \mathbf{T}^4 .

D'après Y. Eliashberg et W. Thurston (voir [1]), on sait que sur tout fibré principal en cercles $M \rightarrow F$ au dessus d'une surface F de genre non nul, il existe une structure de contact transverse aux fibres¹⁾. Un exemple simple est le champ de plans défini par la forme différentielle $d\theta + \cos \theta d\theta_1 + \sin \theta d\theta_2$ sur le tore \mathbf{T}^3 .

Ces auteurs posent le problème d'existence d'une telle structure en dimensions supérieures, et notamment sur le tore \mathbf{T}^5 fibré trivial au dessus de \mathbf{T}^4 .

Dans cette note, on donne une réponse positive: on montre qu'il existe une forme de contact sur le tore \mathbf{T}^5 qui est non seulement transverse aux fibres de la fibration triviale $\mathbf{T}^5 = S^1 \times \mathbf{T}^4 \rightarrow \mathbf{T}^4$, mais en plus \mathbf{T}^2 -invariante. L'action de \mathbf{T}^2 considérée est celle du deuxième facteur dans $\mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^2$.

1. Le premier exemple de structure de contact sur le tore \mathbf{T}^5 a été donné par R. Lutz (voir [2]). Il s'agit du champ de 4-plans défini par la forme

$$\begin{aligned} \omega_0 = & (\sin \theta \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) d\theta_3 + (\sin \theta \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) d\theta_4 \\ & + \sin \theta_1 \cos \theta_1 d\theta - \sin \theta \cos \theta d\theta_1 + \cos \theta \cos \theta_1 d\theta_2, \end{aligned}$$

qui est \mathbf{T}^2 -invariante puisque ses dérivées de Lie par rapport aux champs de vecteurs $\partial/\partial\theta_3$ et $\partial/\partial\theta_4$ sont nulles. Ici θ et les θ_i désignent les 5 coordonnées de \mathbf{R}^5 .

*) Je remercie A. Haefliger pour les discussions fructueuses lors de sa visite à Mulhouse.

¹⁾ Ce problème est dû à E. Giroux.

2. Posons $\omega_t = \omega_0 + t d\theta$, pour tout nombre réel t . Alors :

PROPOSITION. *Il existe un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour tout t , $|t| \leq \varepsilon$, la forme \mathbf{T}^2 -invariante ω_t est de contact sur le tore \mathbf{T}^5 . De plus, pour $1/2 < |t| \leq \varepsilon$, elle est transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$.*

Preuve. Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \omega_t \wedge d\omega_t^2 &= -2(\cos^2 \theta \cos^2 \theta_1 + \sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1 + \sin^4 \theta_1 \\ &\quad + t \cos \theta_1 \sin \theta_1) d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \\ &= -(1 + t \sin 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\cos^2 2\theta + \cos^2 2\theta_1) + 6 \sin^2 \theta \sin^2 \theta_1) \\ &\quad d\theta \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \end{aligned}$$

et que cette 5-forme est une forme volume sur \mathbf{T}^5 pour $|t| \leq 1$. La condition de contact étant ouverte, il existe alors un réel $\varepsilon > 1$ tel que pour $|t| \leq \varepsilon$, la forme ω_t reste de contact sur le tore \mathbf{T}^5 . La deuxième partie de la proposition est évidente.

3. La famille ω_t , avec $0 \leq t \leq \varepsilon$, est une isotopie de formes de contact \mathbf{T}^2 -invariantes sur \mathbf{T}^5 , qui joint ω_0 à ω_ε . Par conséquent, il existe une isotopie φ_t de difféomorphismes \mathbf{T}^2 -équivalents du tore \mathbf{T}^5 telle que φ_0 est l'identité et $\omega_t \wedge \varphi_t^* \omega_0 = 0$ pour tout t dans $[0, \varepsilon]$ (voir [2]).

Ainsi la structure de contact définie par ω_0 est transverse à la fibration en cercles $\mathbf{T}^5 \rightarrow \mathbf{T}^4$ dont les fibres sont les orbites du champ de vecteurs $(\varphi_1)_* \partial/\partial\theta$. Ce qui constitue aussi une solution au problème.

4. Rappelons, d'une part, qu'une forme de contact sur \mathbf{T}^5 ne peut être \mathbf{T}^3 -invariante (voir [2]).

D'autre part, une forme de contact ω sur le tore \mathbf{T}^5 ne peut être à la fois S^1 -invariante (i.e. telle que $L_{\partial/\partial\theta} \omega = 0$) et partout transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$. Plus généralement, d'après [2], on a la

PROPOSITION. *Soit $M(B, S^1, q)$ un fibré principal dont la base est fermée, de dimension $2p$. Si sa classe caractéristique est nulle, il n'existe aucune forme de contact sur M , S^1 -invariante et transverse aux fibres.*

Preuve. Soit Z le champ de vecteurs dont le flot engendre l'action de S^1 sur M . Supposons qu'il existe une forme de contact ω sur M , invariante par S^1 et transverse aux fibres. Alors $\alpha = \omega/\omega(Z)$ est une forme de connexion

telle que $\alpha(Z) = 1$ et $i(Z)d\alpha = 0$. La forme de courbure correspondante venant de la base, il existe une 2-forme Ω sur B telle que $d\alpha = q^*\Omega$. Comme $\alpha \wedge (d\alpha)^p = \alpha \wedge q^*(\Omega^p)$ est une forme volume sur M (puisque α est de contact), Ω^p est une forme volume sur B . Par suite, la classe de cohomologie de Ω est non nulle, ce qui contredit l'hypothèse de nullité sur la classe caractéristique du fibré.

RÉFÉRENCES

- [1] ELIASHBERG, Y. and W. THURSTON. *Confoliations*. University Lecture Series, 13. Amer. Math. Soc. (1998).
- [2] LUTZ, R. Sur la géométrie des structures de contact invariantes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 29 (1979), 283–306.

(Reçu le 27 janvier 1998)

Amine Hadjar

Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
F-68093 Mulhouse Cedex
France
e-mail: A.Hadjar@univ-mulhouse.fr

Vide-leer-empty