

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE  
**Autor:** Colin de Verdière, Yves  
**Kapitel:** 6.2 La formule des traces de Selberg  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63894>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 6.2 LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG

Pour plus de détails sur cette section, voir par exemple l'excellent papier de Hejhal [33]. Le flot géodésique sur les surfaces de Riemann à courbure  $-1$  n'est pas intégrable et on ne peut pas espérer non plus de formules explicites pour le spectre du laplacien. On devra se contenter de formules sommatoires qui généralisent la formule de Poisson.

Prenons l'hamiltonien quantique

$$\hat{H} = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$$

sur le tore de dimension 1,  $X = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ . Son spectre est formé des nombres  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  (séries de Fourier).

On a alors la formule suivante, pour  $\rho \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$  :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \rho(\mu - 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \widehat{\rho}(m) e^{im\mu},$$

où

$$\widehat{\rho}(t) = \int e^{-it\mu} \rho(\mu) d\mu$$

est la transformée de Fourier de  $\rho$  (qui est bien une fonction du temps...). C'est la classique formule sommatoire de Poisson.

On s'intéresse donc à la densité régularisée

$$N_\rho(\mu) = \sum_n \rho(\mu - \mu_n),$$

où les valeurs propres du laplacien sont  $\lambda_n = \frac{1}{4} + \mu_n^2$ .

Motivé par l'analogie avec la fonction  $\zeta$  de Riemann, A. Selberg a montré en 1956 que, pour des fonctions  $\rho$  convenables,  $N_\rho(\mu)$  admet une expression exacte comme somme d'un terme régulier non oscillant  $N_{TF}(\mu)$  dont la partie principale est donnée par Weyl :

$$N_{TF}(\mu) \sim \frac{\text{Aire}(X)}{2\pi} \mu$$

et de termes oscillants  $N_\gamma(\mu)$  associés aux géodésiques périodiques.

L'expression de  $N_\gamma$  est :

$$N_\gamma(\mu) = \widehat{\rho}(L_\gamma) c(\gamma) e^{i\mu L_\gamma},$$

où  $L_\gamma$  est la longueur de la géodésique périodique  $\gamma$  et  $c(\gamma)$  est un nombre complexe non nul calculable en termes de la dynamique linéarisée près de  $\gamma$  (application de Poincaré linéarisée, indice de Morse).