Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE
Autor: Colin de Verdière, Yves
Kapitel: 4.4 Le cas de Schrödinger et l'intégrale de Feynman
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

4.4 Le cas de Schrödinger et l'intégrale de Feynman

Voir [27], [13].

Dans le cas de Schrödinger dépendant du temps, on obtient une représentation à la Feynman:

$$p(t,x,y) = \int_{\Omega_{t,x,y}} e^{i\int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s),\gamma'(s))\,ds/h} d\gamma \,.$$

Bien sûr, cette intégrale n'a pas de statut mathématique bien solide, contrairement à la mesure de Wiener. On doit comprendre $d\gamma$ comme une mesure de Lebesgue.

5. Le spectre semi-classique

5.1 La formule de Weyl

Voir [8], [32].

On considère le spectre de l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbf{R}^n$

$$\widehat{H} = -\frac{h^2}{2}\Delta + V - E\,,$$

où on suppose V C^∞ et $\liminf_{x\to\infty} V \geq 0$. Alors le spectre négatif de $\widehat{H}$ est discret; on l'écrit:

$$E_1(h) < E_2(h) \leq \cdots \,.$$

Si $E < 0$, on considère le comportement asymptotique semi-classique de

$$N_h(E) = \#\{j \mid E_j(h) \leq E\}\,.$$

Il se trouve que l'asymptotique de $N_h(E)$ est purement classique

$$N_h(E) \sim \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^n \mathrm{vol}(\{P_0(x,\xi) \leq E\})\,,$$

ce qui signifie que chaque état propre *occupe* une région de volume $(2\pi h)^{n/2}$ de l'espace des phases. C'est une des versions de la correspondance entre volume et dimension. Cela permet parfois de déterminer le $\hbar$ effectif d'un problème de type semi-classique.

De nombreux auteurs se sont préoccupés d'obtenir des estimations du reste du type

$$N_h(E) = Ch^{-n}(1 + O(h^\alpha))\,.$$