Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE

Autor: Colin de Verdière, Yves

Kapitel: 4.3 EDP LINÉAIRES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63894

4.3 EDP LINÉAIRES AVEC UN PETIT PARAMÈTRE

En général, on étudiera une équation du type :

$$P(h, x, \frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha(x,h)\,(\frac{h}{i}\partial_x)^\alpha ,$$

où les $a_\alpha(x,h)$ sont de la forme :

$$a_\alpha(x,h) = \sum_{j\geq 0} b_{\alpha,j}(x)h^j .$$

On définit alors

$$P_0(x,\xi) = \sum b_{\alpha,0}\xi^\alpha ,$$

qui est appellé symbole principal de P. On supposera dans ce qui suit que P_0 ne prend que des valeurs réelles.

Le but est de décrire les (des) solutions de

$$P_h u_h = O(h^\infty) .$$

EXEMPLE 4.4.

$$P = -\frac{h^2}{2}\Delta + V - E,\;\; P_0 = \frac{1}{2}\|\xi\|^2 + V(x) - E ,$$

(valeurs propres de Schrödinger).

$$\frac{h}{i}\frac{du}{dt} = -\frac{h^2}{2}\Delta u + Vu,\;\; P_0 = \tau - H(x,\xi) ,$$

(Schrödinger dépendant du temps).

$$\lambda^{-2}\Delta_g - 1,\;\; P_0 = g^\star(x,\xi) - 1 ,$$

(grandes valeurs propres du laplacien).

LES SOLUTIONS BKW

On considère l'action de P sur une fonction oscillante et on développe en puissances de h :

$$P(a(x)e^{iS(x)/h}) = e^{iS(x)/h}\big(P_0(x,S'(x))a(x) + \frac{h}{i}\big(\mathcal{X}a(x) + P_1(x,S'(x))a(x)\big) + O(h^2)\big)$$

où $\mathcal{X} = \sum \partial_{\xi_i}P_0(x,S'(x))\partial_{x_i}$ et $P_1(x,\xi)$, le *symbole sous-principal* de P, est une fonction sur $T^\star X$.

Résoudre $P(ae^{iS/h}) = O(h^2)$ équivaut donc à résoudre l'équation eiconale $P_0(x, S'(x)) = 0$, puis une équation différentielle le long des trajectoires de $\mathcal{X}$. Ces deux opérations gardent un sens pour les solutions généralisées, en particulier, $\mathcal{X}$ est la projection sur X de $\mathcal{X}_{P_0}$ et donc on peut lire les équations de transport sur la variété lagrangienne.

Dans le cas de Schrödinger, l'équation de transport s'écrit:

$$\mathcal{X}a + \frac{1}{2}\Delta S a = 0 .$$

Elle s'interprète géométriquement comme l'invariance par le flot hamiltonien de la demi-densité $a(x)|dx|^{1/2}$. Le carré $a(x)^2|dx|$ s'interprète bien en mécanique quantique comme une mesure: la probabilité de présence de la particule.

Pour mettre tout cela en place, on associe, à la représentation de L à partir d'une famille de fonctions, des superpositions de fonctions oscillantes

$$f(x) = \int e^{i\varphi(x,\theta)/h} a(x,\theta) d\theta .$$

EXEMPLE 4.5 (LA FONCTION DE AIRY). *On définit*

$$Ai_h(x) = (2\pi h)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{R}} e^{i(x\xi - \frac{\xi^3}{3})/h} d\xi = h^{-1/6} Ai(xh^{-2/3}) .$$

Cette fonction est associée à la variété lagrangienne

$$x = \xi^2$$

qui admet une caustique en $(0,0)$.

La fonction de Airy décrit en fait le comportement universel des intégrales oscillantes associées aux singularités plis.

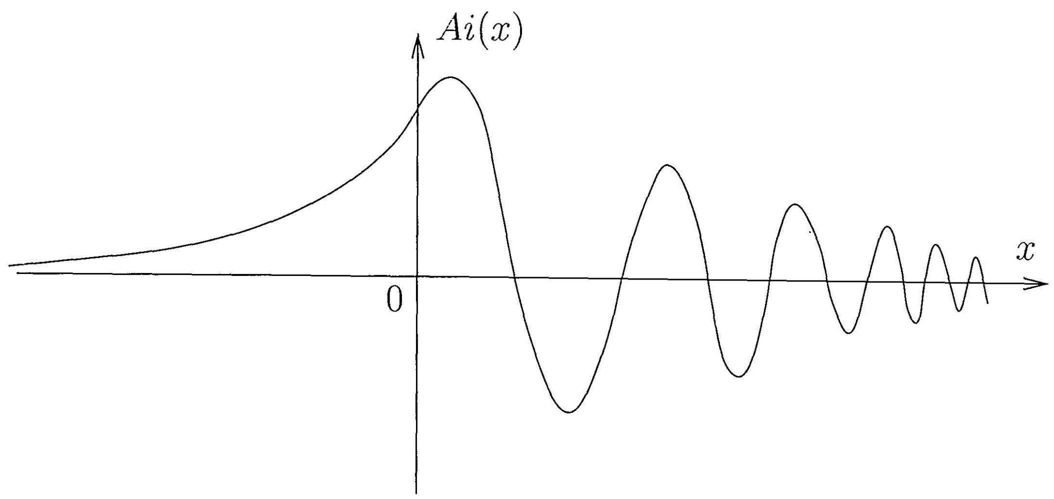

FIGURE 6
La fonction de Airy

Le résultat net est la possibilité d'associer à toute variété lagrangienne L vérifiant $(P_0)|_L = 0$ des solutions locales de $Pu = O(h^2)$ et même $O(h^\infty)$ si on réfléchit un peu.

Ces solutions ne se globalisent pas toujours: ce sont les conditions de quantification.

Dans les cas les plus simples, par exemple dans les exemples 4.6 et 4.7, il s'agit d'une condition portant uniquement sur L : la classe de cohomologie de de Rham de la forme de Liouville $\alpha = \xi dx$ satisfait des conditions d'intégralité du type

$$[\alpha] \in 2\pi h(\mathbf{Z}^n + \mu)\,,$$

où $\mu \in \frac{1}{4}\mathbf{Z}^n$ est l'*indice de Maslov.*

En effet, une fois l'existence d'une densité invariante assurée, il reste le problème des phases qui sont données localement par S dont la différentielle est la restriction à L de α (on retrouve la définition des fronts d'ondes comme feuilles de phases constantes). La contribution des caustiques est donnée par l'indice de Maslov qui a son origine technique dans la phase stationnaire.

EXEMPLE 4.6 (LES SÉRIES DE FOURIER). *On considère l'opérateur* $\frac{h}{i}\partial_x$ *sur* $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. *Son symbole principal est* ξ *et la condition de quantification sur la variété* $\xi = a$ *est*

$$2\pi a = 2\pi h n\,,$$

soit $a = hn$. *On retrouve comme spectre les* hn, $n \in \mathbf{Z}$ *et les séries de Fourier.*

EXEMPLE 4.7 (L'OSCILLATEUR HARMONIQUE).

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}(-\partial_x^2 + x^2)\,.$$

Le symbole principal est

$$\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)$$

et les conditions de quantification s'écrivent pour la variété $H = E$:

$$2\pi E = 2\pi h(n + \frac{1}{2})\,.$$

Elles donnent le spectre exact:

$$E_n = h(n + \frac{1}{2})\,.$$

Cela n'est pas surprenant, car le changement $x = \sqrt{h}x_1$ *transforme* $\widehat{H}_h$ *en* $h\widehat{H}_1$.

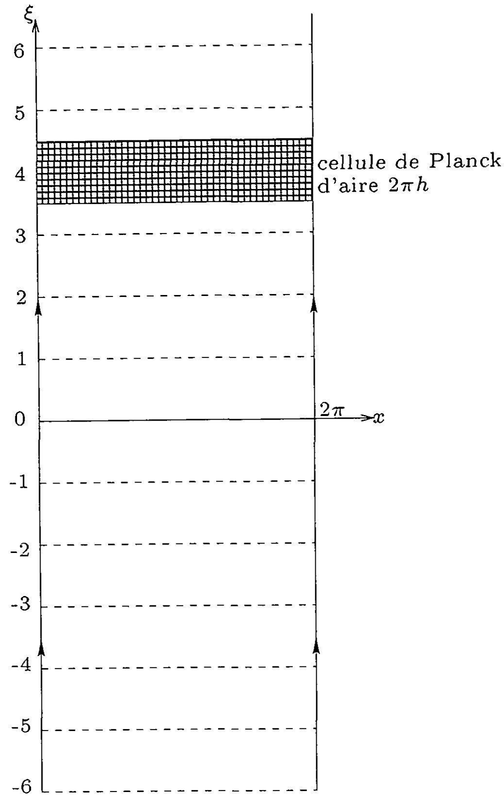

FIGURE 7
L'espace de phase des séries de Fourier

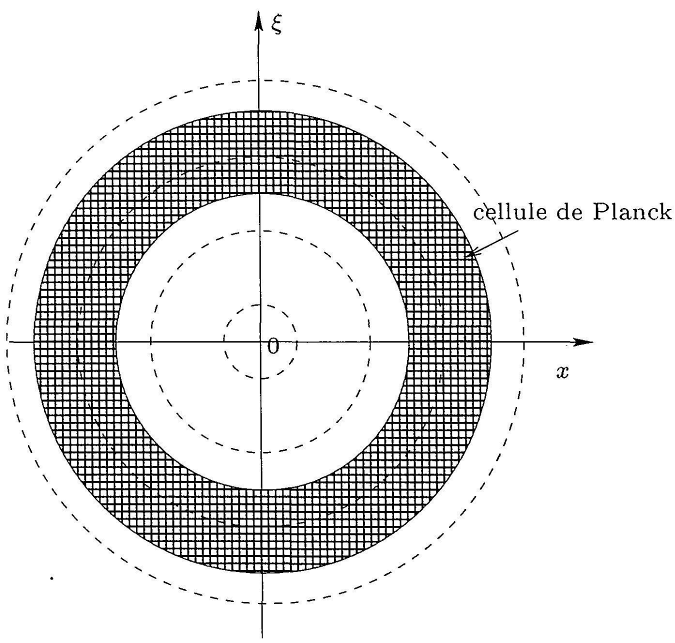

FIGURE 8
L'espace des phases de l'oscillateur harmonique