

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE  
**Autor:** Colin de Verdière, Yves  
**Kapitel:** 4.1 Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63894>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 4. LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE

Pour cette section, voir [2], [25], [29], [32], [42], [44], [51].

## 4.1 INTRODUCTION

Du point de vue physique, la mécanique quantique est apparue comme nécessaire pour remplacer la mécanique classique dans certaines situations (atomes et molécules, physique des étoiles).

De même, l'optique géométrique doit être remplacée par une optique ondulatoire (Maxwell).

Le point commun est l'étude d'EDP linéaires dépendant d'un petit (ou grand) paramètre: équation de Schrödinger avec  $\hbar$  petit, grandes valeurs propres du laplacien riemannien, solutions à grandes fréquences des équations de Maxwell.

On peut aussi considérer de façon plus générale la dégénérescence de systèmes hamiltoniens (en dimension finie ou infinie) dépendant d'un *petit* paramètre vers d'autres systèmes hamiltoniens de dimension plus petite. La méthode de moyennisation est un peu le prototype de ces limites: les oscillations rapides du système (penser à un gyroscope) donnent lieu à un découplage entre une dynamique rapide et une dynamique lente qui est à nouveau hamiltonienne sur un espace des phases réduit.

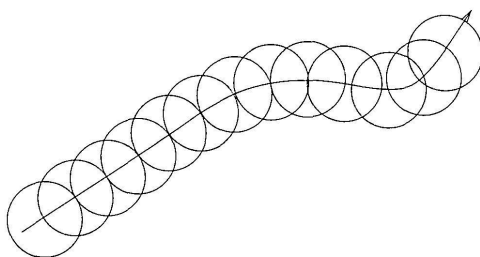


FIGURE 3

Méthode de moyennisation

Si on considère un hamiltonien

$$H_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} H_0 + H_1,$$

sur une variété symplectique de dimension  $2n$  et qu'on suppose que les trajectoires de  $H_0$  contenues dans la couche d'énergie  $E_0$  sont périodiques de période  $T_0$ , on peut introduire la variété symplectique  $Z_{E_0}$  de dimension

$2(n-1)$  des trajectoires de  $H_0$  contenues dans la couche d'énergie  $E_0$  et la munir de l'hamiltonien moyenné  $K = \frac{1}{T_0} \int_{\gamma} H_1 dt$  décrivant une dynamique sur les trajectoires de  $H_0$ . Cette dynamique décrit bien le comportement des trajectoires de  $H_\varepsilon$  dans un intervalle de temps de l'ordre de 1.

## 4.2 LA PHASE STATIONNAIRE

Voir [36].

Dans le cas qui nous préoccupe dans la suite (linéaire), ce découplage est une conséquence de la phase stationnaire : si on considère une intégrale oscillante du type :

$$I(h) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{iS(x)/h} a(x) |dx| ,$$

où  $S: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  est  $C^\infty$  et  $a \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ , le comportement asymptotique de  $I(h)$  quand  $h$  tend vers 0 est contrôlé par les points critiques de  $S$  situés dans le support de  $a$ . Lorsque ceux-ci sont non dégénérés, on a une formule explicite pour le développement asymptotique. Les faits remarquables sont les suivants : le comportement est en  $h^{n/2}$ , il y a une phase liée à l'indice de la hessienne de  $S$  aux points critiques.

Plus précisément, si  $S$  n'a qu'un point critique supposé non dégénéré  $x_0$  dans le support de  $a$  de signature  $\sigma$ , on a :

$$I(h) \sim (2\pi h)^{n/2} e^{iS(x_0)/h} e^{i\sigma\pi/4} \frac{a(x_0)}{|\det(S''(x_0))|^{1/2}} .$$

Le coefficient principal (amplitude) admet une interprétation géométrique comme densité relative de 2 mesures en  $x_0$  : la mesure  $a(x)dx$  et la mesure associée canoniquement à  $S''$  (comme en riemannien). Cette remarque est à l'origine de la géométrisation du calcul des intégrales oscillantes.

Donnons 3 applications semi-classiques simples de la phase stationnaire :

### EXEMPLE 4.1 (FOURIER ET LEGENDRE).

Soit  $S: U \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $C^\infty$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbf{R}^n$  et supposons que  $x \rightarrow S'(x)$  est un difféomorphisme  $C^\infty$  de  $U$  sur un ouvert  $V$  du dual de  $\mathbf{R}^n$ . Soit alors  $\widehat{S}(\xi): V \rightarrow \mathbf{R}$  la transformée de Legendre de  $S$  caractérisée par

$$\{(x, S'(x)) \mid x \in U\} = \{(\widehat{S}'(\xi), \xi) \mid \xi \in V\} ,$$

normalisée par  $\widehat{S}(\xi_0) + S(x_0) = x_0 \xi_0$  pour un point  $\xi_0 = S'(x_0)$ .