

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE INTRODUCTION À LA MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE  
**Autor:** Colin de Verdière, Yves  
**Kapitel:** 2. La mécanique classique  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63894>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. LA MÉCANIQUE CLASSIQUE

Pour cette section, voir [1], [3], [4], [28], [44], [48], [49], [50], [51].

## 2.1 GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE

L'espace des phases du système est une variété symplectique  $(Z, \omega)$ . La plupart du temps, c'est un cotangent  $T^*X$  équipé de la structure canonique. Ce peut être aussi une sous-variété algébrique lisse du projectif complexe équipé de la structure symplectique partie imaginaire de la structure kaehlérienne ou une variété obtenue par réduction symplectique à partir des précédentes.

On se donne ensuite une fonction  $H: Z \rightarrow \mathbf{R}$ , l'hamiltonien du système. On lui associe le champ de vecteurs  $\mathcal{X}_H$ , gradient symplectique de  $H$ , qui donne la dynamique. Il est classique que la dynamique du système décrite par le flot  $\phi_t$  de  $\mathcal{X}_H$  préserve  $H$  et la forme  $\omega$ .

Les exemples de base sont

EXEMPLE 2.1.  $Z = T^*\mathbf{R}^n$  et

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 + V(x),$$

la dynamique étant celle d'une particule dans le potentiel  $V$ , et  $\xi$  étant l'impulsion.

EXEMPLE 2.2.  $Z = T^*X$  où  $X$  est une variété riemannienne de métrique  $g$  et

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2} g^*(\xi),$$

où  $g^*$  est la métrique associée à  $g$  sur le cotangent donnée en coordonnées locales par l'inverse de  $(g_{i,j})$  avec  $g = ds^2 = \sum g_{i,j} dx_i dx_j$ .

La dynamique est alors celle du flot géodésique.

EXEMPLE 2.3.  $Z = P^n\mathbf{C}$  est muni d'une structure symplectique (à peu près) canonique, associée à une structure hermitienne sur  $\mathbf{C}^{n+1}$  : on considère la sphère unité de  $\mathbf{C}^{n+1}$  pour cette métrique hermitienne. La structure symplectique de  $\mathbf{C}^{n+1}$ , partie imaginaire de la forme hermitienne, induit une 2-forme sur cette sphère dont le noyau est constitué par l'action infinitésimale de  $U(1)$ . Le quotient de cette action est  $P^n\mathbf{C}$  qui est ainsi symplectisé.

L'objet le plus central en géométrie symplectique est sans doute la variété lagrangienne.

Une sous-variété lagrangienne  $L$  d'une variété symplectique  $(Z, \omega)$  de dimension  $2n$  est une sous-variété isotrope pour la forme  $\omega$  et de dimension  $n$ . Si  $Z = T^*X$  et si  $L$  est le graphe d'une section (et s'identifie donc à la donnée d'une 1-forme sur  $X$ ),  $L$  est lagrangienne si et seulement si la 1-forme correspondante est fermée. Si  $L = (x, S'(x))$ , on dit que  $S$  est une fonction génératrice. Si  $p: L \rightarrow X$  est la projection, la *caustique* de  $L$  est le sous-ensemble de  $L$  formé des points où la projection est critique. Il est important pour la suite d'étendre la notion de fonction génératrice au cas des caustiques: cela remonte à Maslov et Hörmander. On peut déjà en trouver l'idée dans Huygens et Feynman.

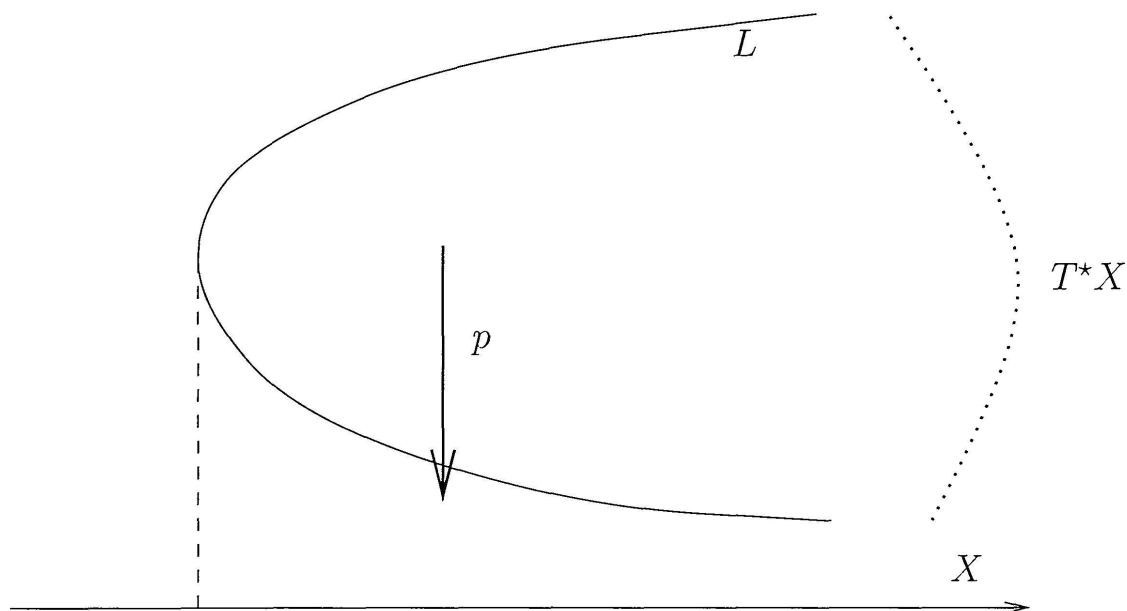


FIGURE 1

Variétés lagrangiennes et caustiques

La notion de variété lagrangienne permet de généraliser la notion de solution d'une EDP non linéaire du type :

$$H(x, S'(x)) = 0.$$

L'équation de Hamilton-Jacobi

$$S'_t + H(x, S'_x) = 0$$

et l'équation eiconale de l'optique

$$\|S'\|^2 = 1$$

en sont des cas particuliers.

Une telle solution généralisée est simplement une variété lagrangienne de  $T^*X$  contenue dans  $H = 0$ .

On voit facilement que le champ  $\mathcal{X}_H$  est tangent à une telle variété. Bien sûr, en général, il y a des caustiques (enveloppe des trajectoires).

Une autre notion importante attachée à une sous-variété lagrangienne  $L$  de  $T^*X$  est celle de fronts d'ondes : ce sont les feuilles du feuilletage défini par la restriction à  $L$  de la 1-forme de Liouville  $\alpha = \xi dx$ . Leurs projections sur  $X$  sont aussi appelées fronts d'ondes.

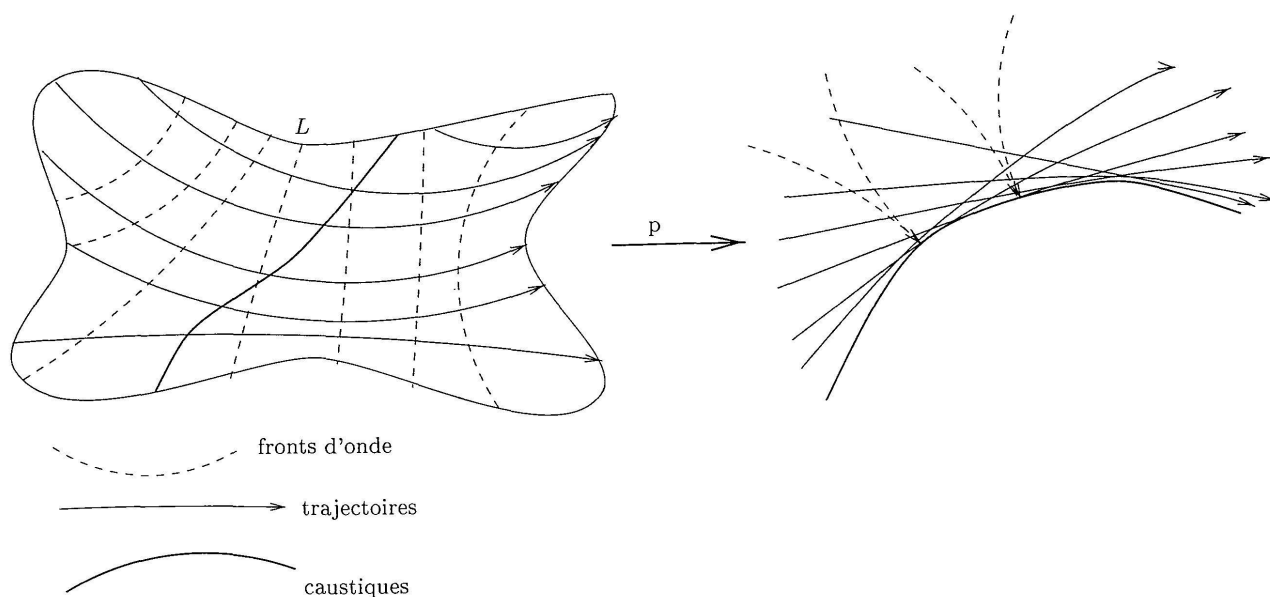


FIGURE 2

Variété lagrangienne et fronts d'ondes

## 2.2 VARIÉTÉS LAGRANGIENNES ET FONCTIONS GÉNÉRATRICES

Une variété lagrangienne a en général des caustiques et ne peut donc pas être représentée par une fonction génératrice naïve. On a recours à une famille de fonctions  $\varphi(x, \theta)$ ,  $\theta \in \mathbf{R}^N$ . Si on considère les fronts d'ondes  $F_{\theta,a} = \{x \mid \varphi(x, \theta) = a\}$ , leur enveloppe est donnée classiquement comme l'ensemble des solutions de  $\varphi = a$ ,  $\partial_{\theta}\varphi = 0$ . A cette enveloppe est associée l'ensemble des  $(x, \partial_x\varphi)$  qui se trouve être, sous des hypothèses de non-dégénérescence, une variété lagrangienne. On retrouve une construction d'Huygens : l'enveloppe d'une famille de fronts d'ondes est un nouveau front d'onde.

C'est un théorème que toute variété lagrangienne admet une représentation de ce type. Une telle famille est du reste unique à des opérations élémentaires près : c'est un théorème dû à Hörmander.

La situation géométrique est celle d'une fibration  $F: E \rightarrow X$  et d'une fonction  $\varphi: E \rightarrow \mathbf{R}$ . Si  $L_0$  est le graphe de  $d\varphi$  contenu dans  $T^*E$ , on passe de  $L_0$  à  $L$  par la réduction symplectique associée au fibré conormal de la fibration.

En particulier, si  $\mathcal{L}: TX \rightarrow \mathbf{R}$  est un lagrangien régulier et  $\Omega_t$  l'ensemble des applications de  $\gamma: [0, t] \rightarrow X$  fibré sur  $X \times X$  par  $\gamma \rightarrow (\gamma(0), \gamma(t))$  et  $\Phi(\gamma) = \int_0^t \mathcal{L}(\gamma(s), \gamma'(s)) ds$ , la variété lagrangienne associée est le graphe du flot hamiltonien  $\varphi_t$  associé au lagrangien  $\mathcal{L}$  par la transformée de Legendre. La fonction génératrice  $\Phi$  est bien sûr reliée à l'intégrale de Feynman.

### 3. LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

Pour cette section, voir [10], [32], [39], [47], [43].

Ici l'espace des phases est un espace de Hilbert (parfois de dimension finie); pour être plus précis, c'est le projectif complexe de cet espace, mais on peut négliger ce détail.

La dynamique est donnée au moyen d'un opérateur auto-adjoint  $\hat{H}$  (avec domaine) sur  $\mathcal{H}$  grâce à l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{du}{dt} = \hat{H}u,$$

dont le flot est le groupe à un paramètre d'opérateurs unitaires donné par :  $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ .

La constante  $\hbar$  n'est pas là uniquement pour faire joli, en général  $\hat{H}$  est une énergie et donc  $\hbar$  a les dimensions d'une action, car on ne peut exponentier que des quantités sans dimension !!

EXEMPLE 3.1.  $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^n)$  et  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V$ . On a alors l'équation de Schrödinger.

EXEMPLE 3.2.  $\mathcal{H} = L^2(X)$  et  $\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2}\Delta_g$ , où  $\Delta_g$  est le laplacien riemannien. On a l'équation de Schrödinger associée au flot géodésique.

EXEMPLE 3.3. Si  $E$  est le fibré anti-canonique sur  $P^n\mathbf{C}$ , on considère l'espace de Hilbert des sections holomorphes de  $E^{\otimes N}$  qui s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré  $N$  sur  $\mathbf{C}^{n+1}$ .

Si  $H: P^n\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ , on considère les opérateurs de Toeplitz  $\hat{H}_N\varphi = \Pi_N(H\varphi)$ , où  $\Pi_N$  est la projection orthogonale des sections sur les sections holomorphes. Voir [19].