

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMFLY POLYNOMIAL VIA AN INVARIANT OF COLORED PLANE GRAPHS
Autor: Murakami, Hitoshi / Yamada, Shuji
Kapitel: B. Table of the invariant
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63908>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.03.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

B. TABLE OF THE INVARIANT

The following is the table of $P_n/[n]$ for knots with crossings less than or equal to eight. (Note that P_n is always divisible by $[n]$.) We refer the reader to [15] for the notations of knots. We used MAPLE V to translate the Homfly polynomial table in [10] to our invariants.

3 ₁	$-q^{2n} + q^{n+1} + q^{n-1}$
----------------	-------------------------------

4 ₁	$q^n - q + 1 - q^{-1} + q^{-n}$
----------------	---------------------------------

5 ₁	$-q^{3n+1} - q^{3n-1} + q^{2n+2} + q^{2n} + q^{2n-2}$
5 ₂	$-q^{3n} + q^{2n+1} - q^{2n} + q^{2n-1} + q^{n+1} - q^n + q^{n-1}$

6 ₁	$q^{2n} - q^{n+1} + q^n - q^{n-1} - q + 2 - q^{-1} + q^{-n}$
6 ₂	$q^{2n+1} - q^{2n} + q^{2n-1} - q^{n+2} + q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1} - q^{n-2} + q + q^{-1}$
6 ₃	$-q^{n+1} + q^n - q^{n-1} + q^2 - q + 3 - q^{-1} + q^{-2} - q^{-n+1} + q^{-n} - q^{-n-1}$

7 ₁	$-q^{4n+2} - q^{4n} - q^{4n-2} + q^{3n+3} + q^{3n+1} + q^{3n-1} + q^{3n-3}$
7 ₂	$-q^{4n} + q^{3n+1} - q^{3n} + q^{3n-1} + q^{2n+1} - 2q^{2n} + q^{2n-1} + q^{n+1} - q^n + q^{n-1}$
7 ₃	$q^{-2n+2} - q^{-2n+1} + q^{-2n} - q^{-2n-1} + q^{-2n-2} + q^{-3n+2} - q^{-3n+1} + 2q^{-3n}$ $- q^{-3n-1} + q^{-3n-2} - q^{-4n+1} - q^{-4n-1}$
7 ₄	$q^{-n+1} - 2q^{-n} + q^{-n-1} + 2q^{-2n+1} - 2q^{-2n} + 2q^{-2n-1} + q^{-3n+1} - 2q^{-3n}$ $+ q^{-3n-1} - q^{-4n}$
7 ₅	$-q^{4n+1} + q^{4n} - q^{4n-1} + q^{3n+2} - 2q^{3n+1} + 2q^{3n} - 2q^{3n-1} + q^{3n-2} + q^{2n+2}$ $- q^{2n+1} + 2q^{2n} - q^{2n-1} + q^{2n-2}$
7 ₆	$-q^{3n} + 2q^{2n+1} - 2q^{2n} + 2q^{2n-1} - q^{n+2} + 2q^{n+1} - 3q^n + 2q^{n-1} - q^{n-2}$ $+ q - 1 + q^{-1}$
7 ₇	$-q^{n+1} + 2q^n - q^{n-1} + q^2 - 2q + 4 - 2q^{-1} + q^{-2} - 2q^{-n+1} + 2q^{-n}$ $- 2q^{-n-1} + q^{-2n}$

8 ₁	$q^{3n} - q^{2n+1} + q^{2n} - q^{2n-1} - q^{n+1} + 2q^n - q^{n-1} - q + 2 - q^{-1} + q^{-n}$
8 ₂	$q^{3n+2} - q^{3n+1} + q^{3n} - q^{3n-1} + q^{3n-2} - q^{2n+3} + q^{2n+2} - 2q^{2n+1} + q^{2n}$ $- 2q^{2n-1} + q^{2n-2} - q^{2n-3} + q^{n+2} + q^n + q^{n-2}$
8 ₃	$q^{2n} - 2q + 3 - 2q^{-1} - q^{n+1} + 2q^n - q^{n-1} - q^{-n+1} + 2q^{-n} - q^{-n-1} + q^{-2n}$
8 ₄	$q^{2n+1} - q^{2n} + q^{2n-1} - q^{n+2} + 2q^{n+1} - 2q^n + 2q^{n-1} - q^{n-2} - q^2 + q - 2$ $+ q^{-1} - q^{-2} + q^{-n+1} + q^{-n-1}$
8 ₅	$q^{-n+2} + 2q^{-n} + q^{-n-2} - q^{-2n+3} + q^{-2n+2} - 3q^{-2n+1} + q^{-2n} - 3q^{-2n-1}$ $+ q^{-2n-2} - q^{-2n-3} + q^{-3n+2} - q^{-3n+1} + 2q^{-3n} - q^{-3n-1} + q^{-3n-2}$
8 ₆	$q^{3n+1} - q^{3n} + q^{3n-1} - q^{2n+2} + 2q^{2n+1} - 3q^{2n} + 2q^{2n-1} - q^{2n-2} - q^{n+2}$ $+ 2q^{n+1} - 3q^n + 2q^{n-1} - q^{n-2} + q + q^{-1}$
8 ₇	$-q^2 + q - 1 + q^{-1} - q^{-2} + q^{-n+3} - q^{-n+2} + 3q^{-n+1} - 2q^{-n} + 3q^{-n-1}$ $- q^{-n-2} + q^{-n-3} - q^{-2n+2} + q^{-2n+1} - 2q^{-2n} + q^{-2n-1} - q^{-2n-2}$
8 ₈	$-q^{n+1} + q^n - q^{n-1} + q^2 - 2q + 4 - 2q^{-1} + q^{-2} + q^{-n+2} - 2q^{-n+1}$ $+ 3q^{-n} - 2q^{-n-1} + q^{-n-2} - q^{-2n+1} + q^{-2n} - q^{-2n-1}$
8 ₉	$q^{n+2} - q^{n+1} + 2q^n - q^{n-1} + q^{n-2} - q^3 + q^2 - 3q + 3 - 3q^{-1} + q^{-2} - q^{-3}$ $+ q^{-n+2} - q^{-n+1} + 2q^{-n} - q^{-n-1} + q^{-n-2}$
8 ₁₀	$-q^2 + q - 2 + q^{-1} - q^{-2} + q^{-n+3} - q^{-n+2} + 4q^{-n+1} - 2q^{-n} + 4q^{-n-1}$ $- q^{-n-2} + q^{-n-3} - q^{-2n+2} + q^{-2n+1} - 3q^{-2n} + q^{-2n-1} - q^{-2n-2}$
8 ₁₁	$q^{3n+1} - q^{3n} + q^{3n-1} - q^{2n+2} + 2q^{2n+1} - 4q^{2n} + 2q^{2n-1} - q^{2n-2} + q - 1$ $+ q^{-1} - q^{n+2} + 3q^{n+1} - 3q^n + 3q^{n-1} - q^{n-2}$
8 ₁₂	$-2q^{n+1} + q^{2n} - 2q^{n-1} + 3q^n + q^2 - 3q + 5 - 3q^{-1} + q^{-2} - 2q^{-n+1}$ $+ 3q^{-n} - 2q^{-n-1} + q^{-2n}$
8 ₁₃	$-q^{2n+1} + q^{2n} - q^{2n-1} + q^{n+2} - 2q^{n+1} + 4q^n - 2q^{n-1} + q^{n-2} - q^{-n+1}$ $+ 2q^{-n} - q^{-n-1} + q^2 - 3q + 4 - 3q^{-1} + q^{-2}$
8 ₁₄	$q^{3n+1} - 2q^{3n} + q^{3n-1} - q^{2n+2} + 3q^{2n+1} - 4q^{2n} + 3q^{2n-1} - q^{2n-2} - q^{n+2}$ $+ 3q^{n+1} - 4q^n + 3q^{n-1} - q^{n-2} + q - 1 + q^{-1}$
8 ₁₅	$q^{5n} - 3q^{4n+1} + 2q^{4n} - 3q^{4n-1} + 2q^{3n+2} - 3q^{3n+1} + 5q^{3n} - 3q^{3n-1} + 2q^{3n-2}$ $+ q^{2n+2} - 2q^{2n+1} + 3q^{2n} - 2q^{2n-1} + q^{2n-2}$
8 ₁₆	$-q^{2n+2} + 2q^{2n+1} - 3q^{2n} + 2q^{2n-1} - q^{2n-2} + q^{n+3} - 2q^{n+2} + 4q^{n+1} - 4q^n$ $+ 4q^{n-1} - 2q^{n-2} + q^{n-3} - q^2 + 2q - 2 + 2q^{-1} - q^{-2}$

817	$q^{n+2} - 2q^{n+1} + 3q^n - 2q^{n-1} + q^{n-2} - q^3 + 2q^2 - 4q + 5 - 4q^{-1} + 2q^{-2} - q^{-3} + q^{-n+2} - 2q^{-n+1} + 3q^{-n} - 2q^{-n-1} + q^{-n-2}$
818	$q^{n+2} - 3q^{n+1} + 3q^n - 3q^{n-1} + q^{n-2} - q^3 + 3q^2 - 4q + 7 - 4q^{-1} + 3q^{-2} - q^{-3} + q^{-n+2} - 3q^{-n+1} + 3q^{-n} - 3q^{-n-1} + q^{-n-2}$
819	$q^{-3n+3} + q^{-3n+1} + q^{-3n} + q^{-3n-1} + q^{-3n-3} - q^{-4n+2} - q^{-4n+1} - q^{-4n} - q^{-4n-1} - q^{-4n-2} + q^{-5n}$
820	$-q^{2n+1} - q^{2n-1} + q^{n+2} + 2q^n + q^{n-2} - q + 1 - q^{-1}$
821	$q^{3n+1} - q^{3n} + q^{3n-1} - q^{2n+2} + q^{2n+1} - 3q^{2n} + q^{2n-1} - q^{2n-2} + 2q^{n+1} - q^n + 2q^{n-1}$

REFERENCES

- [1] FREYD, P., D. YETTER, J. HOSTE, W.B.R. LICKORISH, K. MILLETT and A. OCNEANU. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 12 (1985), 239–246.
- [2] JIMBO, M. Quantum R matrix for the generalized Toda system. *Comm. Math. Phys.* 102 (1986), 537–547.
- [3] JONES, V.F.R. A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 12 (1985), 103–111.
- [4] — On knot invariants related to some statistical mechanical models. *Pacific J. Math.* 137 (1989), 311–336.
- [5] KAUFFMAN, L.H. State models and the Jones polynomial. *Topology* 26 (1987), 395–407.
- [6] KIRBY, R. and P. MELVIN. The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin–Turaev for $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. *Invent. Math.* 105 (1991), 473–545.
- [7] KIRILLOV, A.N. and N.YU. RESHETIKHIN. Representations of the algebra $U_q(\mathfrak{sl}(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links. *Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups*. V.G. Kac, ed., Advanced Series in Mathematical Physics, vol. 7, World Scientific, Singapore, 1989.
- [8] KUPERBERG, G. The quantum G_2 link invariant. *Internat. J. Math.* 5 (1994), 61–85.
- [9] LICKORISH, W.B.R. The skein method for three-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications* 2 (1993), 171–194.
- [10] — *An Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, 1997.
- [11] MORTON, H.R. Invariants of links and 3-manifolds from skein theory and from quantum groups. *Topics in Knot Theory*. M.E. Bozhüyük, ed., Kluwer, 1993.