

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** DYNAMICAL SYSTEMS APPROACH TO BIRKHOFF'S THEOREM  
**Autor:** SIBURG, Karl Friedrich

**Bibliographie**

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63906>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.03.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Secondly, Birkhoff's Theorem also holds true for invariant curves of products  $\phi_N \circ \dots \circ \phi_1$  of monotone twist mappings of the same sign. In general, such products are not monotone twist mappings anymore. This generalization follows immediately by our method if, even more generally, each  $\phi_n$  satisfies the same "cone condition" on  $(\phi_{n-1} \circ \dots \circ \phi_1)(\Gamma)$ . For every single  $\phi_n$  presses more area into a fold, and  $\sup_{n \geq 0} |\Omega_n| < \infty$  because  $\Gamma$  is mapped onto itself again after  $N$  steps, instead of one. A proof along the traditional lines was given by Mather only a couple of years ago [Ma3, Appendix].

Finally, we did not really need that  $\phi$  is a diffeomorphism. Everything can also be formulated and proved for homeomorphisms that preserve Lebesgue measure and satisfy the "cone condition".

#### REFERENCES

- [Bi1] BIRKHOFF, G. D. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.* 43 (1922), 1–119. [Reprinted in: *Collected Mathematical Papers*, Dover/AMS 1968].
- [Bi2] — Sur quelques courbes fermées remarquables. *Bull. Soc. Math. France* 60 (1932), 1–26. [Reprinted in: *Collected Mathematical Papers*, Dover/AMS 1968].
- [Fa] FATHI, A. Appendix to Chapter I of [He].
- [He] HERMAN, M. Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau I. *Astérisque* 103–104 (1983).
- [KH] KATOK, A. and B. HASSELBLATT. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [LCa] LE CALVEZ, P. Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore. *Astérisque* 204 (1991).
- [MP] MACKAY, R. S. and I. C. PERCIVAL. Converse KAM: theory and practice. *Comm. Math. Phys.* 98 (1985), 469–512.
- [Ma1] MATHER, J. N. Glancing billiards. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 2 (1982), 397–403.
- [Ma2] — Non-existence of invariant circles. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 4 (1984), 301–309.
- [Ma3] — Variational construction of orbits for twist diffeomorphisms. *J. Amer. Math. Soc.* 4 (1991), 207–263.
- [MF] MATHER, J. N. and G. FORNI. Action minimizing orbits in Hamiltonian systems. In: S. Graffi (ed.): *Transition to Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. Springer LNM 1589, 1992.

- [Mo1] MOSER, J. *Stable and Random Motion in Dynamical Systems*. Princeton University Press, 1977.
- [Mo2] ——— Recent developments in the theory of Hamiltonian systems. *SIAM Rev.* 28 (1986), 459–485.
- [Ta] TABACHNIKOV, S. *Billiards. Panor. Synthèses 1*, SMF, 1995.

(Reçu le 15 août 1997; version révisée reçue le 13 janvier 1998)

Karl Friedrich Siburg

Fakultät für Mathematik  
Mathematik X (Analysis)  
Ruhr-Universität Bochum  
Universitätsstr. 150  
D-44780 Bochum  
Germany  
*e-mail* : siburg@math.ruhr-uni-bochum.de

**Vide-leer-empty**