Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HOMÉOMORPHISMES DYNAMIQUEMENT SIMPLES DE L'ENSEMBLE DE CANTOR

Autor: Levitt, Gilbert

Kapitel: Automorphismes des groupes libres

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63905

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

AUTOMORPHISMES DES GROUPES LIBRES

Nous exposons ici sans démonstration quelques résultats de [7] sur la dynamique des homéomorphismes de C provenant des automorphismes de groupes libres. Certains énoncés s'étendent aux homéomorphismes obtenus sur le bord d'un groupe hyperbolique arbitraire.

Soit donc F_k un groupe libre de rang $k \geq 2$. On lui associe un ensemble de Cantor $C = \partial F_k$, que l'on peut voir comme son espace de bouts, ou son bord en tant que groupe hyperbolique [1, 3, 4, 10]. Plus concrètement, si l'on choisit une base $\{g_1, \ldots, g_k\}$, on considère les mots réduits infinis $g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots$, où chaque ε_i vaut ± 1. Une suite X_n, avec $X_n \in F_k \cup \partial F_k$, converge vers $X \in \partial F_k$ si, pour tout p, la p-ième lettre de X_n coïncide avec celle de X pour n assez grand.

Tout automorphisme α de F_k définit un homéomorphisme $f = \partial\alpha$ de C. Si par exemple α est la conjugaison i_g par $g \in F_k$, alors f est simplement l'action naturelle de g sur C par translation à gauche (la translation à droite par g^{-1} est à distance bornée de l'identité dans F_k, donc induit l'identité sur le bord). On montre facilement dans ce cas que f a une dynamique Nord-Sud, avec puits $g^\infty = \lim_{n\to\infty} g^n$ et source $g^{-\infty} = \lim_{n\to\infty} g^{-n}$, pourvu que g ne soit pas trivial. Nous allons voir une généralisation de ce phénomène.

Le groupe des *automorphismes extérieurs* $\operatorname{Out} F_k$ est le quotient du groupe d'automorphismes $\operatorname{Aut} F_k$ par la relation d'équivalence qui identifie α et $i_g \circ \alpha$. Nous voyons $\Phi \in \operatorname{Out} F_k$ comme un ensemble d'automorphismes et, comme Nielsen [9], nous disons que $\alpha, \beta \in \Phi$ sont *isogrédients* s'il existe $g \in F_k$ tel que $\beta = i_g \circ \alpha . \circ (i_g)^{-1}$. Soit $\mathcal{S}(\Phi)$ l'ensemble des classes d'isogrédience de représentants de Φ. Si par exemple Φ est l'identité, ses représentants sont les conjugaisons i_g et $\mathcal{S}(\Phi)$ s'identifie naturellement aux classes de conjugaison de F_k.

Deux automorphismes isogrédients α, β produisent des homéomorphismes $\partial\alpha, \partial\beta$ topologiquement conjugués. Nous pouvons donc parler de la dynamique d'une classe d'isogrédience $s \in \mathcal{S}(\Phi)$.

THÉORÈME. *Soit $\Phi \in \operatorname{Out} F_k$, avec $k \geq 2$. L'ensemble $\mathcal{S}(\Phi)$ des classes d'isogrédience de représentants de Φ est infini. Tout $s \in \mathcal{S}(\Phi)$, sauf au plus un nombre fini, a une dynamique Nord-Sud sur C.*

Intéressons-nous maintenant à la dynamique d'un $\partial\alpha$ quelconque.

THÉORÈME. *Pour tout* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$, *l'homéomorphisme* $\partial\alpha$ *a au moins deux points périodiques de période* $\leq 2k$. *Les périodes des points périodiques de* $\partial\alpha$ *sont bornées par un nombre* M_k *ne dépendant que de* k, *avec* $\log M_k \sim \sqrt{k \log k}$ *quand* $k \to \infty$.

Si α est défini par $\alpha(g_i) = g_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq k-1$ et $\alpha(g_k) = g_1^{-1}$, tout point de C est périodique de période $2k$. Si α est défini par $\alpha(g_i) = g_{\sigma(i)}$, où $\sigma \in \Sigma_k$ est une permutation de $\{1, \ldots, k\}$, la période d'un point générique de C est l'ordre de σ. La quantité $\sqrt{k \log k}$ est un équivalent du logarithme de l'ordre maximal d'un élément de torsion dans Σ_k, ou $GL(k, \mathbf{Z})$, ou $\operatorname{Aut} F_k$ (voir [6], [8]).

Cherchons à quelle condition $\partial\alpha$ est simple. Une condition nécessaire est que pour tout $n \geq 1$ le sous-groupe fixe $\operatorname{Fix} \alpha^n = \{g \in F_k \mid \alpha^n(g) = g\}$ soit trivial ou cyclique, car sinon son bord forme un ensemble de Cantor de points périodiques.

Nous laissons de côté le cas où α laisse invariant un sous-groupe cyclique, mentionnant seulement l'automorphisme $a \mapsto a$, $b \mapsto aba$ de F_2 ; pour cet exemple $\partial\alpha$ est simple, le graphe associé par le théorème 1 étant un cercle avec deux sommets et deux arêtes.

Supposons donc $\operatorname{Fix} \alpha^n$ trivial pour tout n. On sait qu'alors les points périodiques de $\partial\alpha$ sont des sources ou des puits, et qu'il y a au plus $2k$ points de chaque type [2].

CONJECTURE. *Soit* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$. *Si le sous-groupe fixe de* α^n *est trivial pour tout* $n \geq 1$, *alors une puissance de* $\partial\alpha$ *est simple.*

Le graphe associé à une puissance simple de $\partial\alpha$ est un graphe bipartite, toute arête allant d'une source à un puits. Nous ne savons pas si tous les graphes bipartites finis peuvent être obtenus de cette façon.

La conclusion de la conjecture revient à dire que tout compact $\partial\alpha$-invariant non vide $K \subset C$ contient un point périodique. Énoncée sous cette forme, la conjecture a un sens pour un automorphisme α quelconque.

La conjecture ci-dessus est vraie si α est irréductible à puissances irréductibles (aucune puissance de α n'envoie un facteur libre de F_k sur un conjugué de lui-même). D'autre part, tout compact $\partial\alpha$-invariant $K \subset C$ contenant un point de la forme g^∞ contient un point périodique. Cela se déduit du résultat suivant :

THÉORÈME. *Soit* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$, *et* $g \in F_k$ *non périodique. Il existe un entier* $q \leq M_k$ *tel que la suite* $(\alpha^q)^n(g)$ *converge vers un point fixe de* $\partial\alpha^q$.

Considérons maintenant la vitesse de convergence vers les points fixes (ou périodiques) de $\partial\alpha$. On définit une distance sur ∂F_k par $d(X,Y) = e^{-c}$, où X, Y sont deux mots réduits infinis et c est la longueur de leur plus grand segment initial commun (voir [3]). Lorsque l'on considère deux bases différentes de F_k, les distances d_1, d_2 ainsi associées sont Hölder-équivalentes : il existe $A > 0$ et $\beta \in]0,1]$ tels que $A^{-1}d_1^{1/\beta} \leq d_2 \leq Ad_1^{\beta}$.

On a ainsi défini une structure Hölder canonique sur ∂F_k (voir [3, 1]). Les homéomorphismes $\partial\alpha$ sont Hölder; lorsqu'ils sont topologiquement conjugués (par exemple si ce sont des homéomorphismes Nord-Sud), on peut se demander s'ils sont Hölder-conjugués.

Remarquons d'abord que, *si* g *et* h *sont des éléments non triviaux de* F_k, *alors les actions de* g *et* h *sur* ∂F_k *sont des homéomorphismes Hölder-conjugués* (on notera que, pour un groupe hyperbolique arbitraire, les actions de deux éléments d'ordre infini ne sont même pas forcément topologiquement conjuguées).

Montrons rapidement ce fait. Le résultat est vrai si $h = \alpha(g)$ avec $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$, car $\partial\alpha$ est une conjugaison Hölder. Il l'est aussi si g et h sont des mots cycliquement réduits de même longueur : en effet les translations à gauche par g et h sont conjuguées en tant qu'isométries de l'arbre de Cayley de F_k, et une isométrie de cet arbre induit un homéomorphisme Hölder sur ∂F_k. Notant g_1, g_2 deux éléments d'une base de F_k, on peut ainsi conjuguer de façon Hölder l'action d'un g quelconque à celle d'un élément cycliquement réduit, puis à celle d'un élément de la forme $g_1 g_2^p$, puis à celle de g_1.

Le théorème suivant fournira une obstruction à la conjugaison Hölder.

THÉORÈME. *Soit* $\alpha \in \operatorname{Aut} F_k$ *tel que* $\partial\alpha$ *possède un point fixe attractif* X. *Il existe un nombre algébrique* $\lambda \geq 1$ *tel que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log\Big(-\log d(\partial\alpha^n(Y), X)\Big) = \log\lambda$$

pour Y *proche de* X *dans* ∂F_k *(et pour toute distance* d *sur* ∂F_k *définissant la structure Hölder).*

Pour $\lambda > 1$, la conclusion signifie que les orbites s'approchent de X à peu près à la même vitesse que pour l'application $x \mapsto x^\lambda : [0,1[\to [0,1[$. Lorsque α est induit par un homéomorphisme pseudo-Anosov φ d'une surface compacte à bord, le λ obtenu est le coefficient de dilatation de φ.

Le nombre λ associé au point fixe X est un invariant de conjugaison Hölder, tout comme en dynamique différentiable les valeurs propres de la matrice jacobienne sont un invariant de conjugaison C^1.

RÉFÉRENCES

[1] COORNAERT, M., T. DELZANT et A. PAPADOPOULOS. *Géométrie et théorie des groupes*. Lecture Notes 1441. Springer-Verlag, 1990.

[2] GABORIAU, D., A. JAEGER, G. LEVITT et M. LUSTIG. An index for counting fixed points of automorphisms of free groups. *Duke Math. J. 93* (1998), 425–452.

[3] GHYS, E. et P. DE LA HARPE (eds.). *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov. Progress in Mathematics 83*. Birkhäuser, 1990.

[4] GROMOV, M. Hyperbolic groups. In: *Essays in Group Theory*, S. M. Gersten Ed. *M.S.R.I. Publ. 8*. Springer Verlag (1987), 75–263.

[5] HOCKING, J. G. et G. S. YOUNG. *Topology*. Dover Publications, New York, 1961.

[6] LANDAU, E. Über die Maximalordnung der Permutationen gegebenen Grades. *Archiv der Math. und Phys., Ser. 3, 5* (1903), 92–103.

[7] LEVITT, G. et M. LUSTIG. *Prépublication*.

[8] LEVITT, G. et J.-L. NICOLAS. On the maximum order of torsion elements in $GL(n, \mathbf{Z})$ and $\mathrm{Aut}(F_n)$. *J. Algebra 208* (1998), 630–642.

[9] NIELSEN, J. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math. 50* (1927), 189–358; traduction anglaise dans *Collected Mathematical Papers*, Birkhäuser, 1986.

[10] SHORT, H. et al. Notes on word hyperbolic groups. In: *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*. E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky, eds. World Scientific (1991), 3–63.

(Reçu le 3 février 1998)

Gilbert Levitt

Laboratoire Émile Picard
UMR CNRS 5580
Université Paul Sabatier
F-31062 Toulouse Cedex 4
France
e-mail: levitt@picard.ups-tlse.fr