

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** HOMÉOMORPHISMES DYNAMIQUEMENT SIMPLES DE  
L'ENSEMBLE DE CANTOR  
**Autor:** Levitt, Gilbert  
**Kapitel:** DÉMONSTRATIONS  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63905>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 28.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Si l'on retire la condition d'uniformité de la définition d'un homéomorphisme simple, la dynamique peut devenir beaucoup plus complexe. Nous montrerons :

**THÉORÈME 2.** *Soit  $v$  un point de  $C$ . Il existe une infinité non dénombrable d'homéomorphismes  $f: C \rightarrow C$ , deux à deux non conjugués, tels que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = v$$

pour tout  $x \in C$ .

### DÉMONSTRATIONS

Rappelons que l'ensemble de Cantor  $C$  est caractérisé à homéomorphisme près comme étant compact, métrisable, parfait, totalement discontinu (voir par exemple [5]). En particulier toute partie non vide, ouverte et fermée de  $C$  est homéomorphe à  $C$ . Tout point de  $C$  possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés. Si  $X$  est localement compact mais pas compact, on notera  $\hat{X} = X \cup \{\text{point}\}$  son compactifié d'Alexandrov.

Soit  $f: C \rightarrow C$  un homéomorphisme simple. La fonction  $f^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n$  existe, et est continue sur  $C \setminus F$ . Elle prend bien sûr ses valeurs dans  $F$ . Montrons que  $f^{-1}$  est simple. Soit  $K$  un compact de  $C \setminus F$ . Soit  $V$  un voisinage ouvert de  $F$ , disjoint de  $K$ . Pour  $n$  grand on a  $f^n(C \setminus V) \subset V$ , d'où  $C \setminus V \subset f^{-n}(V)$  et  $f^{-n}(C \setminus V) \subset V$ . On en déduit  $f^{-n}(K) \subset f^{-n}(C \setminus V) \subset V$ . Donc  $f^{-n}$  converge uniformément sur  $K$ , et  $f^{-1}$  est simple.

En considérant  $f^\infty$  et  $f^{-\infty}$ , on associe alors à  $f$  un graphe  $\Gamma$  comme indiqué dans l'introduction. Il possède évidemment les propriétés (1) et (2) du théorème 1. La propriété (3) sera établie un peu plus tard.

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Elle se décompose en deux parties : surjectivité et injectivité.

*Surjectivité.* Étant donné un graphe  $\Gamma$  possédant les trois propriétés mentionnées dans le théorème, nous allons construire un homéomorphisme simple  $f_0$  tel que  $\Gamma(f_0)$  soit isomorphe à  $\Gamma$ . Nous commençons par trois cas élémentaires.

1. Si  $\Gamma$  est une boucle (un seul sommet, une seule arête), considérons le décalage  $\sigma: (k, n) \mapsto (k, n + 1)$  sur  $X = K \times \mathbf{Z}$ , où  $K$  est un ensemble de

Cantor. La caractérisation rappelée ci-dessus assure que  $\widehat{X}$  est un ensemble de Cantor. Le prolongement  $f_0$  de  $\sigma$  à  $\widehat{X}$  est simple, et  $\Gamma(f_0) = \Gamma$ .

2. Si  $\Gamma$  est un segment (une seule arête, à extrémités distinctes), on considère encore le décalage sur  $X = K \times \mathbf{Z}$ , mais on compactifie  $X$  en lui ajoutant deux points à l'infini, avec comme systèmes fondamentaux de voisinages  $K \times [n, +\infty[$  et  $K \times ]-\infty, -n]$  respectivement.

3. Si  $\Gamma$  se compose d'un sommet et de deux boucles attachées à ce sommet, on considère le compactifié d'Alexandrov de  $(K \setminus \{\text{point}\}) \times \mathbf{Z}$  muni du décalage.

Le cas général s'obtient en combinant ces trois modèles. On part d'un nombre fini de points, identifiés aux sommets de  $\Gamma$ . Pour chaque arête orientée  $v_1v_2$ , avec  $v_1 \neq v_2$ , on attache un modèle de type 2 en identifiant la source avec  $v_1$  et le puits avec  $v_2$ . A chaque sommet  $v$  on attache un modèle de type 1 (resp. 3) s'il y a dans  $\Gamma$  une (resp. deux) boucles en  $v$ , en identifiant l'unique point fixe avec  $v$ . La propriété (3) du théorème 1 garantit que l'on obtient un espace de Cantor. Celui-ci est muni d'un homéomorphisme simple  $f_0$  vérifiant  $\Gamma(f_0) = \Gamma$ .

*Injectivité.* Soit  $f$  un homéomorphisme simple. Pour  $v \in F$ , soit

$$A(v) = \{x \notin F \mid f^{-\infty}(x) = f^\infty(x) = v\}.$$

Pour  $v_1 \neq v_2$ , soit

$$A(v_1, v_2) = \{x \notin F \mid f^{-\infty}(x) = v_1, f^\infty(x) = v_2\}.$$

Les  $A(v)$  et  $A(v_1, v_2)$  qui ne sont pas vides forment une partition de  $C \setminus F$  en sous-espaces  $f$ -invariants ouverts et fermés, dont nous déterminons maintenant l'adhérence dans  $C$ .

**LEMME.** Si  $A(v) \neq \emptyset$ , on a  $\overline{A(v)} = A(v) \cup \{v\}$ . De même, si  $A(v_1, v_2) \neq \emptyset$ , on a  $\overline{A(v_1, v_2)} = A(v_1, v_2) \cup \{v_1, v_2\}$ .

*Démonstration.* Soit  $V$  un voisinage ouvert et fermé de  $v$  tel que  $V \cap F = \{v\}$ , et  $W = \{x \in V \mid x \notin f(V)\}$ . Toute orbite de  $A(v)$  non entièrement contenue dans  $V$  rencontre  $W$ . La convergence de  $f^{\pm n}$  vers  $f^{\pm\infty}$  étant uniforme sur le compact  $W$ , il existe un entier  $N$  tel que

$$A(v) \subset V \cup \bigcup_{|n| \leq N} f^n(W).$$

On en déduit  $\overline{A(v)} = A(v) \cup \{v\}$ . La démonstration pour  $A(v_1, v_2)$  est analogue, en considérant un voisinage de  $\{v_1, v_2\}$  ne contenant pas d'autre point de  $F$ .  $\square$

Il résulte de ce lemme que  $\Gamma(f)$  possède la propriété (3) du théorème 1. En effet, un  $w \in F$  n'appartenant à aucune arête n'appartiendrait à aucun  $\overline{A(v)}$  ou  $\overline{A(v_1, v_2)}$ . C'est impossible puisque l'union des adhérences des  $A(v)$  et des  $A(v_1, v_2)$  est  $C$  tout entier.

Nous allons maintenant terminer la preuve du théorème 1 en montrant que, étant donné  $\Gamma$ , tout homéomorphisme simple  $f$  tel que  $\Gamma(f)$  soit isomorphe à  $\Gamma$  est topologiquement conjugué au  $f_0$  construit plus haut.

Le lemme permet de supposer que  $f_0$  est l'un des trois modèles ci-dessus, la conjugaison cherchée pouvant être définie séparément sur chaque  $\overline{A(v)}$  ou  $\overline{A(v_1, v_2)}$ .

Commençons par le cas où  $\Gamma$  est un segment. Appelons  $v_1$  la source de  $f$ , et  $v_2$  le puits. Soit  $V$  un voisinage ouvert et fermé de  $v_2$  ne contenant pas  $v_1$ . Nous affirmons que l'ouvert  $U = \bigcup_{n \geq 0} f^n(V)$  est aussi fermé. En effet, si  $W = \{x \in f(V) \mid x \notin V\}$ , on a

$$U = V \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(W),$$

et cette union est finie car  $f^n$  converge vers  $v_2$  uniformément sur  $W$ .

Soit alors  $\mathcal{K}$  le compact  $U \setminus f(U)$ . Il rencontre chaque orbite de  $C \setminus F$  exactement une fois. Soit  $\rho$  un homéomorphisme de  $\mathcal{K}$  sur le compact  $K$  utilisé pour construire  $f_0$ . On le prolonge en un homéomorphisme de  $C \setminus F$  sur  $K \times \mathbf{Z}$  en posant  $\rho(f^n(k)) = (k, n)$  pour  $k \in \mathcal{K}$ , et il s'étend à  $C$  en une conjugaison de  $f$  à  $f_0$ .

Supposons maintenant que  $\Gamma$  a un seul sommet. Soit  $v$  l'unique point fixe de  $f$ . Notons que, pour tout voisinage ouvert  $V$  de  $v$ , les intersections avec  $C \setminus V$  de  $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V)$  et  $\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V)$  sont des ouverts. En effet, si  $Y \subset C \setminus V$  est un voisinage compact d'un point  $x \neq v$ , on a pour  $n$  assez grand  $f^{-n}(Y) \subset V$  et  $f^n(Y) \subset V$ , et donc aussi  $Y \subset f^n(V)$  et  $Y \subset f^{-n}(V)$ .

On suppose d'abord que  $\Gamma$  est une seule boucle, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage  $V$  de  $v$  ne contenant aucune orbite autre que  $\{v\}$  en totalité. On choisit  $V$  ouvert et fermé, et on considère

$$\mathcal{K} = (C \setminus V) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V).$$

Il est fermé, ouvert, et rencontre toute orbite autre que  $\{v\}$  exactement une fois. Comme précédemment, tout homéomorphisme de  $\mathcal{K}$  avec  $K$  s'étend en une conjugaison de  $f$  avec le  $f_0$  du modèle 1.

Supposons enfin que  $f$  a un unique point fixe  $v$  et qu'il existe des orbites arbitrairement proches de  $v$ . Soit  $V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_p \supset \dots$  un système

fondamental de voisinages ouverts et fermés de  $v$ , avec  $V_0 = C$ . Posons

$$\mathcal{Q}_p = (V_p \setminus V_{p+1}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(V_{p+1}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V_p)$$

pour  $p \geq 0$ , et  $\mathcal{Q} = \cup \mathcal{Q}_p$ . Chaque  $\mathcal{Q}_p$  étant ouvert, fermé, et contenu dans  $V_p$ , l'ensemble  $\mathcal{Q}$  est ouvert, et son adhérence est  $\mathcal{Q} \cup \{v\}$ . En particulier,  $\mathcal{Q}$  est homéomorphe à un ensemble de Cantor privé d'un point. De plus  $\mathcal{Q}$  rencontre chaque orbite autre que  $\{v\}$  en exactement un point (si  $x \neq v$ , son orbite rencontre  $\mathcal{Q}_p$ , où  $p$  est le plus grand entier tel que l'orbite soit contenue dans  $V_p$ ). Tout homéomorphisme de  $\mathcal{Q}$  sur  $K \setminus \{\text{point}\}$  s'étend alors en une conjugaison de  $f$  avec le  $f_0$  du modèle 3.  $\square$

### DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE

Seule la première assertion demande une démonstration. Soit  $A$  un ensemble à  $n$  éléments. Il y a  $p_n = 3^n 2^{n(n-1)}$  manières d'attacher des arêtes orientées aux éléments de  $A$  de façon que le graphe obtenu vérifie les conditions (1) et (2) du théorème 1. Presque tous ces graphes vérifient également la condition (3): le nombre de ceux qui ne la vérifient pas est majoré par  $np_{n-1}$ , qui est un  $o(p_n)$ . Pour estimer  $N(n)$  nous devons compter les graphes à isomorphisme près, c'est à dire en faisant agir le groupe symétrique. Puisque  $\log p_n \sim n^2 \log 2$  et  $\log n! = o(n^2)$ , on a bien  $\log N(n) \sim n^2 \log 2$ .  $\square$

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2

Soit  $K$  un ensemble de Cantor, et  $L = \widehat{K \times \mathbf{N}}$ . Nous distinguons dans  $L$  le point à l'infini, noté  $\infty$ , et  $L_0 = K \times \{0\}$ . Soit  $\sigma$  le prolongement à  $L$  du décalage  $(k, n) \mapsto (k, n + 1)$ , et  $\sigma^{-1}$  son inverse, défini sur  $L \setminus L_0$ .

Considérons maintenant  $M = L \times \{-1, 1\} \times \mathbf{N}$ . Notons  $\widehat{M} = M \cup \{v\}$  son compactifié d'Alexandrov,  $M^- = L \times \{-1\} \times \{0\}$ , et  $M^+ = L \times \{1\} \times \{0\}$ . Nous définissons un homéomorphisme  $\varphi$  de  $\widehat{M} \setminus M^+$  sur  $\widehat{M} \setminus M^-$  par:

$$\begin{cases} \varphi(\ell, -1, n) = (\sigma^{-1}(\ell), -1, n + 1) & \text{pour } \ell \in L \setminus L_0 \\ \varphi(\ell, -1, n) = (\ell, 1, n) & \text{pour } \ell \in L_0 \\ \varphi(\ell, 1, n) = (\sigma(\ell), 1, n - 1) & \text{pour } n > 0 \\ \varphi(v) = v. \end{cases}$$

La dynamique de  $\varphi$  est analogue à celle d'un champ de vecteurs du plan dans un secteur d'une selle. Le point  $v$  est fixe. L'orbite positive de  $(\infty, -1, 0)$  tend vers  $v$ , de même que l'orbite négative de  $(\infty, 1, 0)$ . Si  $\ell \neq \infty$ , l'orbite

d'un point  $(\ell, -1, 0) \in M^-$  aboutit à  $M^+$ , après un nombre d'itérations qui tend vers l'infini quand  $\ell \rightarrow \infty$  dans  $L$ .

Soit maintenant  $q \geq 1$  un entier. Soit  $P$  l'union disjointe de  $q$  exemplaires  $\widehat{M}_1, \dots, \widehat{M}_q$  de  $\widehat{M}$ , et de deux exemplaires  $L^-, L^+$  de  $\widehat{L \times \mathbf{N}}$ . Notons que les sous-espaces  $M_i^-$ ,  $M_i^+$  de  $\widehat{M}_i$ , ainsi que  $L \times \{0\} \subset L^-$  et  $L \times \{0\} \subset L^+$ , sont des exemplaires de  $L$ . Il existe donc des homéomorphismes canoniques entre ces espaces.

Nous définissons un homéomorphisme  $\theta$  sur  $P$  de la manière suivante. Sur chaque exemplaire  $\widehat{M}_i$ , il est égal à  $\varphi$  en dehors de  $M_i^+$ . Sur  $M_i^+$ , pour  $i < q$ , il coïncide avec l'homéomorphisme naturel de  $M_i^+$  sur  $M_{i+1}^-$ , et sur  $M_q^+$  c'est l'homéomorphisme de  $M_q^+$  avec  $L \times \{0\} \subset L^+$ . On définit  $\theta$  sur  $L^+$  comme le prolongement du décalage  $(\ell, n) \mapsto (\ell, n + 1)$  de  $L \times \mathbf{N}$ , sur  $L^- \setminus (L \times \{0\})$  comme le prolongement de l'inverse du décalage, et enfin sur  $L \times \{0\} \subset L^-$  comme l'homéomorphisme naturel de  $L \times \{0\}$  avec  $M_1^-$ .

Les points fixes de  $\theta$  sont une source  $v^-$  (le point à l'infini de  $L^-$ ), un puits  $v^+$  (le point à l'infini de  $L^+$ ), et  $q$  "selles"  $v_1, \dots, v_q$  (une dans chaque  $\widehat{M}_i$ ). Toutes les orbites infinies de  $\theta$  vont de  $v^-$  à  $v^+$ , sauf  $q + 1$  orbites "singulières" qui vont respectivement de  $v^-$  à  $v_1$ , de  $v_i$  à  $v_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq q - 1$ ), et de  $v_q$  à  $v^+$ .

Ces  $q + 1$  orbites sont mutuellement contiguës, au sens suivant : nous disons que les orbites de deux points  $x, y$  sont *contiguës* s'il existe une suite  $x_p \rightarrow x$ , et des entiers  $n_p$ , avec  $\theta^{n_p}(x_p) \rightarrow y$ . Les autres orbites infinies de  $\theta$  ne sont contiguës qu'à elles-mêmes. Les orbites singulières de  $\theta$  sont en fait les points de non-séparation de l'espace des orbites infinies de  $\theta$ .

Identifiant entre eux les  $q + 2$  points fixes de  $\theta$ , nous obtenons pour chaque  $q \geq 1$  un homéomorphisme  $f_q$  d'un ensemble de Cantor, possédant un unique point fixe  $v$  et vérifiant les conditions du théorème 2. Ces homéomorphismes ne sont pas conjugués entre eux : ils sont distingués par la contiguïté.

Pour obtenir une infinité non dénombrable, nous combinons les  $f_q$ . Soit  $Q$  une partie non vide de  $\mathbf{N}$ , avec  $0 \notin Q$ . Pour chaque  $q \in Q$ , soit  $C_q$  un ensemble de Cantor muni de l'homéomorphisme  $f_q$ . Notons  $c_q$  le point fixe de  $f_q$ . Considérons, sur le compactifié d'Alexandrov de l'union disjointe des  $C_q \setminus \{c_q\}$ , l'homéomorphisme  $f_Q$  qui coïncide avec  $f_q$  sur chaque  $C_q \setminus \{c_q\}$ . Il vérifie les conditions du théorème 2. Sur l'ensemble des orbites infinies de  $f_Q$ , la contiguïté est une relation d'équivalence. Il y a une classe d'équivalence à  $q + 1$  éléments pour chaque  $q \in Q$ , et les autres classes ont un seul élément. Donc  $f_Q$  n'est pas conjugué à  $f_{Q'}$  si  $Q \neq Q'$ .  $\square$