

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 44 (1998)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** HOMÉOMORPHISMES DYNAMIQUEMENT SIMPLES DE L'ENSEMBLE DE CANTOR  
**Autor:** Levitt, Gilbert  
**Kapitel:** Introduction  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63905>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## HOMÉOMORPHISMES DYNAMIQUEMENT SIMPLES DE L'ENSEMBLE DE CANTOR

par Gilbert LEVITT

**ABSTRACT.** We classify, up to topological conjugacy, self-homeomorphisms  $f$  of a Cantor set  $C$  which are simple in the following sense: the fixed point set  $F$  of  $f$  is finite, non-empty, and the sequence  $f^n$  converges uniformly on compact subsets of  $C \setminus F$ . If the uniformity requirement is dropped, uncountably many different dynamics arise.

We discuss (without proofs) results by Levitt-Lustig about homeomorphisms of  $C$  induced by automorphisms of free groups.

### INTRODUCTION

Les homéomorphismes d'un ensemble de Cantor  $C$  dans lui-même peuvent avoir une dynamique extrêmement riche et compliquée. Nous considérons ici les homéomorphismes  $f: C \rightarrow C$  qui sont *simples*, au sens suivant: l'ensemble  $F$  des points fixes de  $f$  est fini, et la suite  $f^n$  converge uniformément sur tout compact disjoint de  $F$ . On vérifie qu'alors les deux limites  $f^{-\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x)$  et  $f^{\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x)$  existent, et appartiennent à  $F$ .

Tout automorphisme  $\alpha$  d'un groupe libre  $F_k$  de rang fini  $k \geq 2$  induit un homéomorphisme  $\partial\alpha$  sur l'ensemble de Cantor  $\partial F_k$  des bouts de  $F_k$ . On renvoie à [7], et à la deuxième partie du présent texte, pour une discussion de la dynamique de  $\partial\alpha$ . Pour "la plupart" des  $\alpha \in \text{Aut } F_k$ , l'homéomorphisme  $\partial\alpha$  a une dynamique Nord-Sud (il est simple, et  $F$  se compose de deux points: une source et un puits). Notre question d'origine était de savoir si toutes ces dynamiques sont conjuguées (topologiquement, ou de manière Hölder).

Notre résultat principal est une classification des homéomorphismes simples, à conjugaison topologique près. Plus généralement, on pourrait classifier de manière analogue les homéomorphismes dont une puissance est simple.

THÉORÈME 1. *Soit  $C$  un ensemble de Cantor. Il existe une bijection entre les classes de conjugaison d'homéomorphismes simples de  $C$ , et les classes d'isomorphisme de graphes finis orientés  $\Gamma$  tels que :*

- (1) *Étant donné deux sommets distincts  $v_1, v_2$ , il y a au plus une arête orientée allant de  $v_1$  à  $v_2$ .*
- (2) *Étant donné un sommet  $v$ , il y a au plus deux arêtes dont les deux extrémités sont égales à  $v$ .*
- (3) *Tout sommet de  $\Gamma$  appartient à au moins une arête.*

Les graphes seront toujours supposés non vides, pas forcément connexes. Deux graphes orientés sont isomorphes si et seulement si il existe entre eux un isomorphisme préservant l'orientation.

Le graphe  $\Gamma = \Gamma(f)$  associé à un homéomorphisme simple  $f$  est construit comme suit. L'ensemble de ses sommets est  $F$ . Si  $v_1 \neq v_2$ , on place une arête orientée allant de  $v_1$  à  $v_2$  si et seulement si il existe  $x \notin F$  avec  $f^{-\infty}(x) = v_1$  et  $f^{\infty}(x) = v_2$ . Étant donné  $v \in F$ , on place une arête faisant une boucle en  $v$  si et seulement si il existe  $x \notin F$  avec  $f^{-\infty}(x) = f^{\infty}(x) = v$ . On place une seconde boucle en  $v$  si tout voisinage de  $v$  dans  $C$  contient la totalité d'une orbite  $\{f^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$ , avec  $x \notin F$  (présence d'un "pétale").

On déduit du théorème 1 :

COROLLAIRE.

(i) *Soit  $N(n)$  le nombre de classes de conjugaison d'homéomorphismes simples de  $C$  possédant  $n$  points fixes. On a  $\log N(n) \sim n^2 \log 2$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .*

(ii) *Si  $f$  est simple, il est conjugué à  $f^p$  pour tout  $p \geq 2$ .*

(iii) *Tous les homéomorphismes de  $C$  ayant une dynamique Nord-Sud sont topologiquement conjugués les uns aux autres.*

Rappelons que  $f$  a une *dynamique Nord-Sud* (parfois appelée *loxodromique*) s'il est simple et si  $F$  se compose de deux points, une *source*  $v^-$  et un *puits*  $v^+$  : on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{\pm n}(x) = v^{\pm}$ , uniformément sur tout compact de  $C \setminus \{v^{\pm}\}$ .

On notera qu'il n'y a pas unicité topologique de la dynamique Nord-Sud sur la sphère  $S^n$  (l'orientation peut être préservée ou renversée). Si d'autre part  $n \geq 2$  et  $f: S^n \rightarrow S^n$  est simple avec un seul point fixe  $v$ , alors il existe toujours des orbites arbitrairement proches de  $v$  (en effet le quotient de  $S^n \setminus \{v\}$  par l'action de  $f$  n'est pas compact, car  $S^n \setminus \{v\}$  n'a qu'un bout).

Si l'on retire la condition d'uniformité de la définition d'un homéomorphisme simple, la dynamique peut devenir beaucoup plus complexe. Nous montrerons :

**THÉORÈME 2.** *Soit  $v$  un point de  $C$ . Il existe une infinité non dénombrable d'homéomorphismes  $f: C \rightarrow C$ , deux à deux non conjugués, tels que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(x) = v$$

*pour tout  $x \in C$ .*

### DÉMONSTRATIONS

Rappelons que l'ensemble de Cantor  $C$  est caractérisé à homéomorphisme près comme étant compact, métrisable, parfait, totalement discontinu (voir par exemple [5]). En particulier toute partie non vide, ouverte et fermée de  $C$  est homéomorphe à  $C$ . Tout point de  $C$  possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés. Si  $X$  est localement compact mais pas compact, on notera  $\widehat{X} = X \cup \{\text{point}\}$  son compactifié d'Alexandrov.

Soit  $f: C \rightarrow C$  un homéomorphisme simple. La fonction  $f^\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n$  existe, et est continue sur  $C \setminus F$ . Elle prend bien sûr ses valeurs dans  $F$ . Montrons que  $f^{-1}$  est simple. Soit  $K$  un compact de  $C \setminus F$ . Soit  $V$  un voisinage ouvert de  $F$ , disjoint de  $K$ . Pour  $n$  grand on a  $f^n(C \setminus V) \subset V$ , d'où  $C \setminus V \subset f^{-n}(V)$  et  $f^{-n}(C \setminus V) \subset V$ . On en déduit  $f^{-n}(K) \subset f^{-n}(C \setminus V) \subset V$ . Donc  $f^{-n}$  converge uniformément sur  $K$ , et  $f^{-1}$  est simple.

En considérant  $f^\infty$  et  $f^{-\infty}$ , on associe alors à  $f$  un graphe  $\Gamma$  comme indiqué dans l'introduction. Il possède évidemment les propriétés (1) et (2) du théorème 1. La propriété (3) sera établie un peu plus tard.

### DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Elle se décompose en deux parties : surjectivité et injectivité.

*Surjectivité.* Étant donné un graphe  $\Gamma$  possédant les trois propriétés mentionnées dans le théorème, nous allons construire un homéomorphisme simple  $f_0$  tel que  $\Gamma(f_0)$  soit isomorphe à  $\Gamma$ . Nous commençons par trois cas élémentaires.

1. Si  $\Gamma$  est une boucle (un seul sommet, une seule arête), considérons le décalage  $\sigma: (k, n) \mapsto (k, n+1)$  sur  $X = K \times \mathbf{Z}$ , où  $K$  est un ensemble de