

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ORIGINES DU CALCUL SYMPLECTIQUE CHEZ LAGRANGE
Autor: IGLESIAS, Patrick
Kapitel: 3. Application à la stabilité séculaire du grand axe
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63904>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Il achève la remarque 5 de son article *Sur les suites récurrentes...* par ce paragraphe prémonitoire, treize ans avant son premier mémoire sur la variation des constantes appliquées au système des planètes :

« Il est visible au reste que cette méthode, que je ne fais qu'exposer ici en passant, peut s'appliquer également au cas où l'on aurait plusieurs équations différentielles entre plusieurs variables dont on connaîtrait les intégrales complètes approchées, c'est-à-dire en y négligeant des quantités supposées très petites. Elle sera par conséquent fort utile pour calculer les mouvements des planètes en tant qu'ils sont altérés par leur action mutuelle, puisqu'en faisant abstraction de cette action la solution complète du problème est connue; et il est bon de remarquer que, comme dans ce cas les constantes a, b, c, \dots représentent ce qu'on nomme les *éléments des planètes*, notre méthode donnera immédiatement les variations de ces éléments provenant de l'action que les planètes exercent les unes sur les autres. »

On peut se demander quelle est alors la différence entre cette méthode, introduite dans les années 1770, et son application au cas du système des planètes ? Elle relève principalement du type de système traité. En appliquant sa méthode générale de la variation des constantes aux systèmes différentiels spécifiques de la mécanique, Lagrange fait apparaître une structure particulière, qui n'existe pas dans le cas général et qui est à l'origine de la géométrie symplectique. Cette structure, caractérisée par les crochets et parenthèses qu'il a définis, Lagrange va savoir en tirer profit, comme il l'espérait, dans l'étude de la stabilité du grand axe des planètes, c'est ce que nous allons voir maintenant.

3. APPLICATION À LA STABILITÉ SÉCULAIRE DU GRAND AXE

Nous sommes en mesure maintenant de déduire, de toutes ces transformations et manipulations algébriques, le théorème de Lagrange sur la stabilité du grand axe des planètes. Appliquons la formule (23) à l'époque c :

$$(25) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial c} = [c, a] \frac{da}{dt} + [c, b] \frac{db}{dt} + \dots + [c, k] \frac{dk}{dt}.$$

On peut vérifier que les crochets $[c, b], [c, h], [c, i], [c, k]$ sont nuls; il reste :

$$(26) \quad [c, a] = -1/2a^2 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \Omega}{\partial c} = -\frac{1}{2a^2} \frac{da}{dt}.$$

Si on se rappelle alors que le demi-grand axe a est égal à $-1/f$, où la constante des forces vives f est le double de l'énergie¹⁷⁾ H du mouvement képlérien, on obtient :

¹⁷⁾ La lettre H a été choisie par Lagrange en l'honneur de Huygens et non de Hamilton, voir [Lag11, tome I, pages 217–226 et 267–270].

$$(27) \quad \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \Omega}{\partial c}.$$

Cette formule est en réalité très générale et Lagrange l'établit pour tous les problèmes de mécanique analytique conservatifs [Lag09].

Comme nous l'avons déjà dit, le potentiel de perturbation Ω (fonction de \mathbf{r}) est considéré comme fonction de t et des éléments képlériens (a, b, c, h, i, k) . Mais le temps n'intervient dans Ω que par $t - c$, plus précisément Ω n'est fonction que de $(a, b, t - c, h, i, k)$. En effet dans les coordonnées du plan de l'orbite, en prenant pour axe des x l'axe du vecteur \mathbf{E} et en posant $\mathbf{r} = (x, y)$, on a :

$$(28) \quad x = a\sqrt{1 - \frac{b}{a}} + a \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = \sqrt{ab} \sin(\theta),$$

où l'anomalie excentrique θ est donnée en inversant la formule (12) de Kepler. On peut préciser davantage les choses en notant ϕ_E la fonction :

$$(29) \quad \phi_E: \theta \mapsto \theta - E \sin(\theta) \quad \text{avec} \quad E = \sqrt{1 - \frac{b}{a}}.$$

Cette fonction est inversible (car $E < 1$) et on peut écrire :

$$(30) \quad x = a\sqrt{1 - \frac{b}{a}} + a \cos \left[\phi_E^{-1} \left(\frac{t - c}{a^{3/2}} \right) \right]$$

et

$$(31) \quad y = \sqrt{ab} \sin \left[\phi_E^{-1} \left(\frac{t - c}{a^{3/2}} \right) \right].$$

On en déduit, d'une part, une nouvelle expression pour la formule (27) donnant la variation de l'énergie H :

$$(32) \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial t}.$$

On constate, d'autre part, que la fonction Ω est périodique en $t - c$ (formules (30) et (31)), de période $2\pi a^{3/2}$. Le potentiel peut se développer alors en série trigonométrique. Il est intéressant de noter ce que Lagrange écrit explicitement à ce propos [Lag08, pages 735–736] :

«comme les valeurs des coordonnées peuvent être réduites en série de sinus et cosinus, il est facile de voir que la fonction Ω pourra être réduite en une série de sinus et cosinus; ces sinus et cosinus ayant pour coefficients des fonctions des éléments a, b, c , etc.»

Nous écrivons aujourd'hui :

$$(33) \quad \Omega = \sum_k A_k \exp \frac{ik(t-c)}{a^{3/2}}.$$

Les coefficients A_k étant des fonctions seulement des éléments de l'orbite a, b, h, i, k , l'équation (32) devient alors :

$$(34) \quad \frac{dH}{dt} = \sum_{k \neq 0} \frac{ikA_k}{a^{3/2}} \exp \frac{ik(t-c)}{a^{3/2}}.$$

Ainsi que l'énonce Lagrange : la première approximation consiste à regarder dans la fonction Ω tous ces éléments comme constants [Lag08, page 736] — *i.e.* à considérer, à l'intérieur des fonctions A_k , les éléments de l'orbite comme constants. Sans vouloir commenter la validité de cette affirmation, on obtient ensuite par intégration :

$$(35) \quad H(t) \sim H_0 + \sum_{k \neq 0} A_k \exp \frac{ik(t-c)}{a^{3/2}}.$$

ce premier ordre d'approximation, la fonction H (et donc le grand axe $a = -1/2H$) ne contient pas de terme linéaire en t (qu'on appelle¹⁸) le *terme séculaire*) mais seulement des termes périodiques. Nous venons de démontrer le théorème de stabilité du grand axe de Lagrange. Laissons lui le soin de l'exprimer [Lag08, page 736] :

THÉORÈME 2 [Lagrange]. *Les grands axes des planètes ne peuvent être sujets qu'à des variations périodiques, et non à des variations croissant comme le temps.*

Ce théorème n'est qu'une application particulière des méthodes de la variation des constantes introduites par Lagrange. Il ne concerne, tel qu'il est présenté ici, que la première approximation (démontrée la première fois, mais par d'autres méthodes, par Laplace en 1773). Son véritable théorème sur la stabilité séculaire des grands axes des planètes (où il étend véritablement le résultat de Laplace) est plus profond, subtil et délicat car il prend en compte le mouvement de toutes les planètes (consulter par exemple [Ste69]). Il n'est malheureusement pas possible de le présenter dans cet article.

L'importance de cette nouvelle méthode introduite par Lagrange, outre qu'elle formule de façon élégante les principes de la mécanique analytique

¹⁸) Car sa présence entraîne des perturbations sensibles au long des siècles.

— en introduisant la structure symplectique de l'espace des mouvements képlériens — facilite aussi le calcul des autres *inégalités*¹⁹). C'est ce qui la rendra célèbre puisque Lagrange montrera que la variation de l'angle du périhélie de Jupiter, observée par les astronomes (mais non encore expliquée à l'époque), est périodique. Il en calculera la période (~ 900 ans si on croit Sternberg [Ste69]).

4. LA STRUCTURE SYMPLECTIQUE DE L'ESPACE DES MOUVEMENTS KÉPLÉRIENS

Ces crochets $[a, b]$, $[a, c]$, ..., fonctions seulement des éléments képlériens a , b , c etc. possèdent trois propriétés remarquables.

1° Ils sont *anti-symétriques*:

$$(36) \quad [a, b] = -[b, a], \quad [a, c] = -[c, a], \quad \text{etc.},$$

2° La matrice ω définie par la famille de crochets:

$$(37) \quad \omega_{ab} = [a, b], \quad \omega_{ac} = [a, c], \quad \text{etc.},$$

est inversible, et son inverse est la matrice des parenthèses de Lagrange:

$$(38) \quad (\omega^{-1})_{ab} = (a, b), \quad (\omega^{-1})_{ac} = (a, c), \quad \text{etc.},$$

3° Pour tous les triplets d'éléments (a, b, c) , (a, b, h) , ..., (i, h, k) l'équation aux dérivées partielles suivante est vérifiée:

$$(39) \quad \frac{\partial [b, c]}{\partial a} + \frac{\partial [c, a]}{\partial b} + \frac{\partial [a, b]}{\partial c} = 0, \quad \text{etc.}$$

Ces trois propriétés font de la matrice ω ce qu'on appelle aujourd'hui une *forme symplectique*.

Sans vouloir s'attarder sur les définitions formelles, disons seulement qu'une *forme différentielle* définie sur un ouvert d'un espace numérique est une application qui à chaque point de cet ouvert associe une application multilinéaire alternée. Par exemple, une 2-forme ω définie sur un ouvert de \mathbf{R}^{2n} sera caractérisée par $n(n-1)/2$ fonctions ω_{ij} , de telle sorte que:

$$(40) \quad \omega(x)(X, Y) = \sum_{i,j} \omega_{ij}(x) X^i Y^j,$$

¹⁹) C'est ainsi qu'on appelait les variations des éléments de l'orbite dues aux perturbations extérieures.