Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 44 (1998)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ORIGINES DU CALCUL SYMPLECTIQUE CHEZ LAGRANGE

Autor: IGLESIAS, Patrick

Kapitel: 1. GÉOMÉTRIE DES MOUVEMENTS D'UNE PLANÈTE AUTOUR D'UN CENTRE FIXE

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63904

Géométrie symplectique différentielle. Applications. [Sou53] Dans un article plus récent du même auteur: *La structure symplectique de la mécanique décrite par Lagrange en 1811* [Sou86], on peut lire un autre aspect des relations entre la géométrie symplectique et la mécanique de Lagrange.

1. Géométrie des mouvements d'une planète autour d'un centre fixe

Pour comprendre et apprécier la méthode de la variation des constantes développée par Lagrange, il est nécessaire de bien connaître la résolution du problème à deux corps. Nous allons en donner un bref résumé dans ce qui suit.

Depuis Newton on sait que les mouvements d'un point matériel (une planète) autour d'un centre fixe (le Soleil) est décrit par l'équation differentielle[8]) suivante:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,, \tag{1}$$

où $\mathbf{r}$ désigne un vecteur non nul de l'espace $\mathbf{R}^3$ et r son module. Transformons cette équation différentielle en un système du premier ordre dans $[\mathbf{R}^3 - \{0\}] \times \mathbf{R}^3$, les *mouvements* de la planète deviennent les solutions de:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}\,, \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{2}$$

Comme on le sait[9]), l'énergie totale du système est conservée le long du mouvement. Les astronomes appellent *constante des forces vives* le double de l'énergie, on la notera f :

$$f = v^2 - \frac{2}{r}\,. \tag{3}$$

D'autre part, comme la force d'attraction gravitationnelle est centrale, le moment cinétique $\mathbf{L}$ est lui aussi conservé:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}\,. \tag{4}$$

---

[8]) Il faudrait en toute rigueur multiplier $\mathbf{r}$ par la constante d'attraction solaire, mais nous choisirons les unités de telle sorte qu'elle soit égale à 1.

[9]) depuis Huygens, dans son *Horlogium oscillatorium* de 1673.

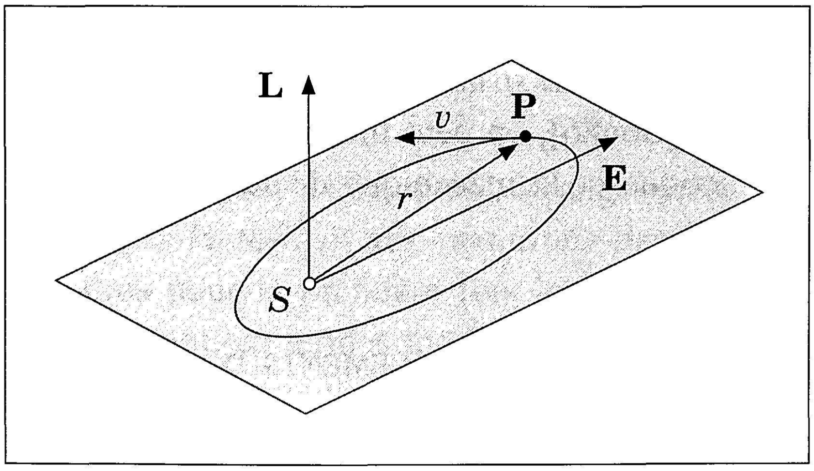

FIGURE 1
L'orbite de la planète P

De cette invariance on déduit que le mouvement de la planète s'effectue dans le plan orthogonal à $\mathbf{L}$.

On peut vérifier qu'un autre vecteur, indépendant de $\mathbf{L}$, est miraculeusement conservé le long du mouvement, c'est *le vecteur de Laplace* :

$$\mathbf{E} = \mathbf{L} \wedge \mathbf{v} + \frac{\mathbf{r}}{r}\,. \tag{5}$$

On déduit, de cet invariant supplémentaire, les trajectoires des planètes. En effet, on a immédiatement :

$$E^2 = 1 + f L^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\,.\,\mathbf{L} = 0\,. \tag{6}$$

Le vecteur $\mathbf{E}$ est donc dans le plan du mouvement. On a de plus, le long du mouvement :

$$\mathbf{E}\,.\,\mathbf{r} + L^2 = r\,. \tag{7}$$

Soit ϕ l'angle entre $\mathbf{E}$ et $\mathbf{r}$, alors :

$$E\,r\cos\phi + L^2 = r \quad \text{ou encore} \quad r = \frac{L^2}{1 - E\cos\phi}\,, \tag{8}$$

On reconnaît ainsi l'équation d'une conique de paramètre L^2, d'excentricité E et d'axe la direction du vecteur $\mathbf{E}$. Les astronomes appellent l'angle ϕ l'*anomalie vraie* [10]). Le vecteur $\mathbf{E}$ pourrait s'appeler le *vecteur d'excentricité.*

Les trajectoires de la planète sont donc des sections coniques, avec le Soleil pour foyer. Leur nature dépend essentiellement du signe de l'énergie totale, comme le montre la formule (6).

---

[10]) Dans ce contexte, le terme *anomalie* signifie simplement *paramètre.*

- Si $f < 0$ alors $E < 1$, l'orbite est elliptique.
- Si $f = 0$ alors $E = 1$, l'orbite est parabolique.
- Si $f > 0$ alors $E > 1$, l'orbite est hyperbolique.

Dans le cas des orbites elliptiques, on trouve tout de suite la valeur du demi-grand axe, noté a :

(9) $$a = -\frac{1}{f}\,.$$

Nous pouvons décrire complètement la variété des mouvements képlériens elliptiques ($f < 0$) si l'on exclut les chutes sur le centre, c'est-à-dire si on se restreint à $\mathbf{L} \neq 0$. Une trajectoire elliptique est bien définie par les deux vecteurs $\mathbf{L}$ et $\mathbf{E}$; le vecteur $\mathbf{E}$ donnant à la fois l'excentricité et l'axe de la conique, le plan étant défini comme l'orthogonal de $\mathbf{L}$ et le paramètre de l'ellipse valant L^2. Autrement dit, l'espace des trajectoires képlériennes elliptiques est équivalent à l'ensemble des couples de vecteurs $(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ tels que :

(10) $$E < 1\,, \quad L \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\,.\,\mathbf{L} = 0\,.$$

C'est une sous-variété, de dimension 5, de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Ce n'est pas encore l'espace des mouvements képlériens elliptiques : il nous faut pouvoir calculer la position de la planète à chaque instant. On pourrait, pour cela, choisir la position de la planète sur son orbite (c'est-à-dire l'anomalie vraie) à l'*instant zéro*. Mais ce choix donne lieu à des calculs pénibles. On considère plutôt le vecteur qui joint l'origine du cercle circonscrit à l'ellipse, au point $\mathbf{A}$ de ce cercle qui a la même projection orthogonale, sur l'axe dirigé par $\mathbf{E}$, que la planète P (voir figure 2).

Ce vecteur, ou plus précisément l'angle θ qu'il fait avec l'axe de l'ellipse, est appelé *anomalie excentrique* [11]), il a été introduit par Kepler. En utilisant la définition de la constante f et après quelques manipulations algébriques, on peut constater que, le long du mouvement :

(11) $$dt = \sqrt{a^3}\left[1 - E\cos(\theta)\right] d\theta\,.$$

Ce qui nous donne par intégration une nouvelle constante du mouvement :

(12) $$c = t - \sqrt{a^3}\left[\theta - E\sin(\theta)\right]\,.$$

---

[11]) Comme le montre la figure l'*anomalie excentrique* doit son nom à ce qu'il est le paramètre excentré de l'ellipse, le vrai centre étant bien entendu le foyer : centre d'attraction.

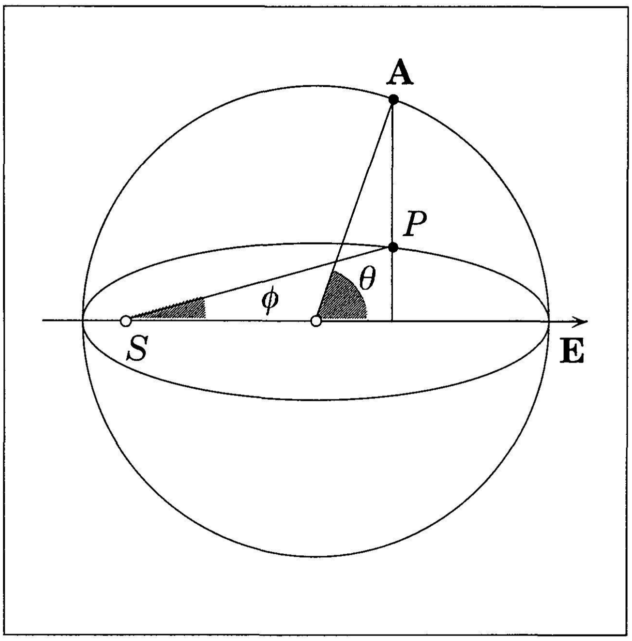

FIGURE 2
L'anomalie excentrique

C'est la valeur de t pour $\theta = 0$, c'est-à-dire la date du passage de la planète à l'aphélie. C'est ce paramètre que les astronomes appellent l'*époque* de la planète, et qu'ils choisissent à la place de l'anomalie excentrique à l'instant zéro [12]).

REMARQUE. Les mouvements képlériens sont donc définis par les valeurs de l'époque, du moment cinétique et du vecteur de Laplace. Mais il est évident, puisque tous les mouvements elliptiques sont périodiques, que cet espace des mouvements képlériens est aussi l'ensemble des conditions initiales à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire l'ouvert de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ des couples $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ vérifiant :

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{v} \neq 0 \quad \text{et} \quad v^2 - \frac{2}{r} < 0\,. \tag{13}$$

La représentation d'un mouvement céplérien par ses conditions initiales ou par ses caractéristiques géométriques est *a priori* purement affaire de goût. Nous verrons quand même que certaines représentations sont plus pratiques que d'autres. Lagrange choisira les six *éléments képlériens* (a, b, c, h, i, k), où a est la valeur du demi-grand axe (l'inverse de la constante des forces vives au signe près), b est le paramètre de l'ellipse (le carré du moment cinétique), c est l'époque. Les éléments h, i et k déterminent le plan de l'orbite et l'axe

[12]) En réalité ce paramètre est mal défini puisque le mouvement de la planète est périodique. Il n'est vraiment défini que modulo $\sqrt{a^3}$ (la période du mouvement). Il faudrait plutôt choisir $C = \exp(2ic/\sqrt{a^3})$. Ce qui est équivalent au choix de $\mathbf{A}$ à l'instant zéro.

de l'ellipse dans ce plan : i est l'inclinaison du plan de l'orbite par rapport à un plan de référence, h est la *longitude des nœuds*, c'est-à-dire l'angle que fait la trace du plan de l'orbite sur le plan de référence (la *ligne des nœuds*), et k est la *longitude du périhélie*, c'est-à-dire l'angle que fait l'axe de l'ellipse avec la ligne des nœuds.

2. La méthode de la variation des constantes

Maintenant que nous avons bien compris et résolu [13]) le problème à deux corps (au moins en ce qui concerne les orbites elliptiques), il nous reste à traiter le problème à deux corps perturbé, et d'introduire ainsi les premiers calculs symplectiques comme l'a fait Lagrange. Nous nous bornerons, comme lui, aux perturbations des orbites elliptiques.

Nous avons déjà expliqué, dans l'introduction, la méthode de la variation des constantes : l'influence de la perturbation à laquelle est soumise une planète attirée par un centre fixe est traduite comme une courbe sur l'espace des éléments de la planète, c'est-à-dire l'espace de ses mouvements képlériens. C'est cette courbe dont il s'agit de déterminer l'équation, et éventuellement d'en extraire quelques renseignements, comme par exemple la stabilité du grand axe. Ce résultat avait été découvert par Laplace en 1773. Nous allons montrer maintenant comment Lagrange l'a inclus dans le cadre général de sa méthode de la variation des constantes.

Supposons donc, comme le fait Lagrange, que la planète subisse de façon continue une série de chocs infiniment petits. Ces chocs se traduisent par une variation instantanée de la vitesse, sans conséquence sur sa position. Si on désigne par a un élément quelconque de la planète (pas nécessairement le demi grand axe), on pourra écrire [14]) :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \,. \tag{14}$$

En remarquant que le vecteur $d\mathbf{v}/dt$ représente exactement la force perturbatrice X exercée sur la planète à l'instant t au point $\mathbf{r}$, la variation infinitésimale de l'élément a, sous l'effet de la perturbation, peut s'écrire à nouveau :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \mathbf{v}} X \,. \tag{15}$$

---

[13]) En toute rigueur il faudrait encore inverser la fonction $\theta \mapsto t$. Problème connu sous le nom de *Problème de Kepler*. Mais ce n'est pas le but de cet article.

[14]) De façon générale, on note $\partial y/\partial x$ l'application linéaire tangente d'une application $x \mapsto y$.