

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 44 (1998)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NEW PROOF OF VINCENT'S THEOREM

Autor: Alesina, Alberto / Galuzzi, Massimo

Bibliographie

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63903>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

The second equality may be rewritten as

$$(8.10) \quad \phi^{2k} > r.$$

From the first inequality of (8.9) and (8.10) it follows that

$$\frac{\Delta}{5} \phi^{2h+1} \phi^{2k} = \frac{\Delta}{5} \phi^{2(h+k)+1} > r.$$

Hence

$$\frac{\Delta}{5} \phi^{2m+1} > r.$$

Since

$$r > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{r+2}} \quad \text{for } r \geq 2,$$

$m \geq p$ for r sufficiently large and the proof is concluded. \square

ACKNOWLEDGMENTS. We are indebted to Xu Kang, Alberto Setti and Giancarlo Travaglini, for the help they gave us in preparing this paper.

REFERENCES

- [1] AKRITAS, A. G. Vincent's theorem in algebraic manipulation. Ph. D. Thesis, Operation Research Program, North Carolina State University, Raleigh, N.C., 1978.
- [2] —— A new method for polynomial real root isolation²⁰). *Proceedings of the 16th annual southeast regional ACM conference*, Atlanta, Georgia, April 1978, 39–43.
- [3] —— A correction on a theorem by Uspensky. *Bull. Soc. Math. Grèce (N.S.)* 19 (1978), 278–285.
- [4] —— Reflections on a pair of theorems by Budan and Fourier. *Math. Mag.* 55 (1982), 292–298.
- [5] —— There is no “Uspensky’s method”. Extended abstract. *Proceedings of the 1986 Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Waterloo, Ontario, Canada, 1986, 88–90.
- [6] —— The role of the Fibonacci sequence in the isolation of the real roots of polynomial equations. *Applications of Fibonacci Numbers*, vol. 3, 1988.
- [7] —— *Elements of Computer Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [8] AKRITAS, A. G. and S. D. DANIELOPOULOS. On the forgotten theorem of Mr. Vincent. *Historia Math.* 5 (1978), 427–435.
- [9] AKRITAS, A. G. and S. D. DANIELOPOULOS. A converse rule of signs for polynomials. *Computing* 34 (1985), 283–286.

²⁰) This paper won the first prize in the student paper competition.

- [10] AHLFORS, L. V. *Complex Analysis* (2nd ed.). McGraw-Hill, New York, 1966.
- [11] BARTOLOZZI, M. and R. FRANCI. La regola dei segni dall'enunciato di R. Descartes (1637) alla dimostrazione di Gauss (1828). *Arch. Hist. Exact Sci.* 45 (1993), 335–374.
- [12] BOMBIERI, E. and A. J. VAN DER POORTEN. Continued fractions of algebraic numbers. *Computational algebra and number theory*, Sydney, 1992, 137–152. *Math. Appl.* 325, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [13] BOURDON, L. P. M. *Éléments d'Algèbre*. Bachelier père et fils, Paris, 1831, sixième édition.
- [14] BRENT, R. P., A. J. VAN DER PORTEN and H. J. J. TE RIELE. A comparative study of algorithms for computing continued fractions of algebraic numbers. In: *Algorithmic Number Theory* (H. Cohen, ed.), Second International Symposium ANTS-II, Talence, France, May 18–23, 1996, 35–47.
- [15] BUDAN, F. D. *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*. Chez Courcier, Paris, 1807.
- [16] CANTOR, D. G., P. H. GALYEAN and H. G. ZIMMER. A continued fraction algorithm for real algebraic numbers. *Math. Comp.* 26 (1972), 785–791.
- [17] CHEN, J. A new algorithm for the isolation of real roots of polynomial equations. *Second International Conference on Computers and Applications*, Beijing, People's Republic of China, 1987, 714–719, IEEE Computer Soc. Press.
- [18] COLLINS, G. E. and A. G. AKRITAS. Polynomial real root isolation using Descartes' rule of signs. *Proceedings of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 272–275. Yorktown Heights, NY, 1976.
- [19] DESCARTES, R. *Œuvres*. Originally edited by C. Adam and P. Tannery, 12 vols. New presentation, Vrin, Paris, 1974–1986.
- [20] FOURIER, J. *Analyse des équations déterminées*. Firmin Didot frères libraires, Paris, 1831.
- [21] LLOYD, E. KEITH On the forgotten Mr. Vincent. *Historia Math.* 6 (1979), 448–450.
- [22] LAGRANGE, J. L. *Œuvres de Lagrange*. 14 vols., Gauthier-Villars, Paris, 1867–1892.
- [23] —— Sur la résolution des équations numériques. *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres* (Berlin), 23 (1767), 1769, 311–352; *Œuvres* 2, 539–578.
- [24] —— Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques. *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres* (Berlin) 24 (1768), 1770, 111–180. *Œuvres* 2, 581–652.
- [25] —— *De la résolution des équations numériques de tous les degrés*. Duprat, Paris, 1798.
- [26] —— *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*. Enlarged edition of [25], chez Courcier, Paris, 1808. *Œuvres* 8.
- [27] LANG, S. and H. TROTTER. Continued fractions for some algebraic numbers. *J. reine angew. Math.* 255 (1972), 112–134. Addendum, *ibid.*, 219–220.
- [28] LÜTZEN, J. *Joseph Liouville*. Springer, New York, 1990.

- [29] MARDEN, M. *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable.* American Mathematical Society, New York, 1949.
- [30] OBRESCHKOFF, N. *Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963.
- [31] POGGENDORFF, J. C. *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften.* J. A. Barth, Leipzig, 1863.
- [32] ROSEN, D. and J. SHALLIT. A continued fraction algorithm for approximating all real polynomial roots²¹). *Math. Mag.* 51 (1978), 112–116.
- [33] SINACEUR, H. *Corps et modèles.* Vrin, Paris, 1991.
- [34] SMITH, D. E. and M. L. LATHAM (eds.). *The Geometry of René Descartes.* Dover publications, New York, 1954.
- [35] USPENSKY, J. V. *Theory of Equations.* McGraw-Hill, New York, 1948.
- [36] VINCENT, A. J. H. Sur la résolution des équations numériques. *Mémoires de la Société royale de Lille* (1834), 1–34. Also in *Journal de mathématiques pures et appliquées* 1 (1836), 341–372.
- [37] —— Addition à une précédente Note relative à la résolution des équations numériques. *Mémoires de la Société royale de Lille* (1838), 5–24. Also in *Journal de mathématiques pures et appliquées* 3 (1838), 235–243.
- [38] WANG, Xianghao. A method for isolating roots of algebraic equations. Jilin Univ. Academic Press, N. 1, 1960.

(Reçu le 26 janvier 1998)

Alberto Alesina
Massimo Galuzzi

Dipartimento di Matematica “F. Enriques”
Università degli Studi di Milano
Via Saldini 50
I-20133 Milano
Italy
e-mail : alesina@vmimat.mat.unimi.it
galuzzi@vmimat.mat.unimi.it

²¹) Presented at the *Conference on Computation in Algebra and Number Theory*, Univ. of New Brunswick, Canada, August 1975.