Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 7.4. Le cas intégrable

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

En intégrant $\xi \to e^{(y-x)\xi}$ le long de γ_+ et de γ_-, on obtient :

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+} \frac{e^{(y-x)\,\xi_0}}{y-x}\,a(y)\,dy + \frac{1}{2i\pi}\int_{d-} \frac{e^{(y-x)\,\xi_0}}{y-x}\,a(y)\,dy\,.$$

Si C_R désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy :

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\,\xi_0}}{y-x}\,a(y)\,dy\,.$$

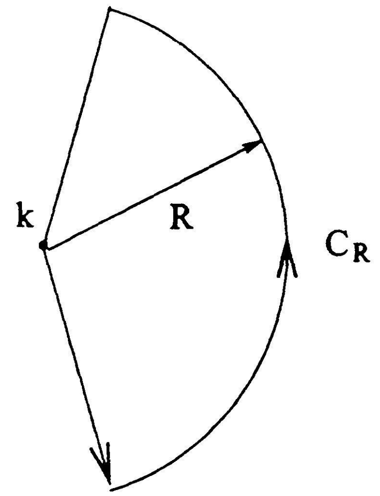

FIGURE 4

En faisant tendre R vers l'infini on voit que $\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = a(x)$ pour tout $x \in S$. $\square$

7.4. LE CAS INTÉGRABLE

Supposons que la fonction a appartienne à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$ $(r \geq 0)$ où V_β désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C}\backslash\{0\} \mid -\beta < Arg(x) < \beta\}\,,$$

avec $\pi/2 < \beta < \pi$.
Reprenons les notations de la sous-section 7.2 ; en particulier $U_r(\theta)$ désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}\,.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant $\mathcal{B}_k(a)$ de la transformée de Borel de a se prolonge analytiquement :

– sur l'ouvert

$$U_r^+ := \bigcup_{\theta \in [-\beta, 0]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée $\mathcal{B}_k^+(a) \in \mathcal{O}(U_r^+)^{\exp(k)}$;
– sur l'ouvert

$$U_r^- := \bigcup_{\theta \in [0, \beta]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée $\mathcal{B}_k^-(a) \in \mathcal{O}(U_r^-)^{\exp(k)}$ (voir figure 5).

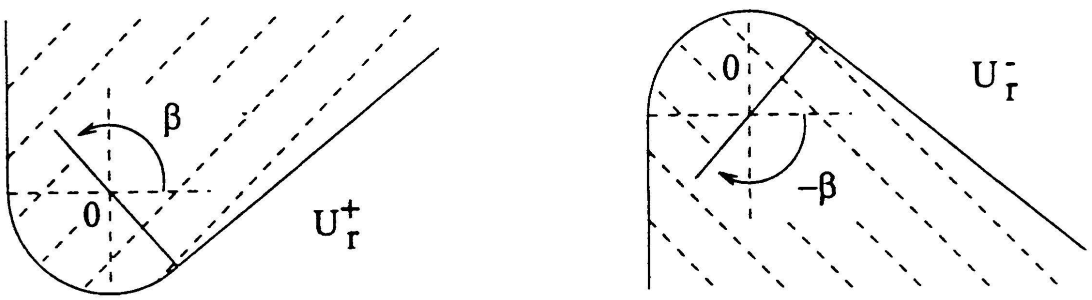

FIGURE 5

Faisons à présent l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 1. *La fonction $\mathcal{B}_k^+(a)$ (resp. $\mathcal{B}_k^-(a)$) se prolonge analytiquement dans l'ouvert U_0^+ (resp. U_0^-).*

Désignons alors par ${}^\star U^\beta$ le voisinage sectoriel de l'infini défini par ${}^\star U^\beta := U_0^+ \cap U_0^-$. Une application du théorème de Cauchy montre alors la proposition suivante.

PROPOSITION 7.1. *Sous les hypothèses précédentes, la fonction $\widehat{a}$, appelée* le mineur *de a, définie pour $\xi \in {}^\star U^\beta$ par : $\widehat{a}(\xi) = \mathcal{B}_k^+(a)(\xi) - \mathcal{B}_k^-(a)(\xi)$, ne dépend pas de k et on a :*

$$\widehat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{x\xi}\, a(x)\, dx\,,$$

où Γ est le chemin représenté sur la figure 6. De plus, $\widehat{a} \in \mathcal{O}({}^\star U^\beta)^{\exp(0)}$.

Le fait que $\widehat{a}$ appartienne à l'espace vectoriel $\mathcal{O}({}^\star U^\beta)^{\exp(0)}$ est une conséquence directe des propriétés de croissance à l'infini de $\mathcal{B}_k^+(a)$ et $\mathcal{B}_k^-(a)$ en faisant tendre k vers zéro.

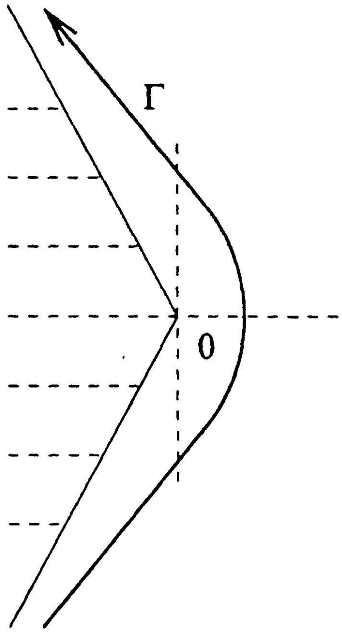

FIGURE 6

PROPOSITION 7.2. *Si la fonction a possède un développement $a(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$ convergent à l'infini, alors la fonction $\widehat{a}$ est entière et $\widehat{a}(\xi) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}$.*

Démonstration. Le développement $\sum_{n\geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$ est uniformément convergent pour $|x| > R$. En prenant pour contour Γ un cercle de centre 0 et de rayon $R' > R$, on a:

$$\widehat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma e^{x\xi} \sum_{n\geq 1} a_n \frac{1}{x^n}\, dx = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n\geq 1} a_n \int_\Gamma e^{-x\xi} \frac{1}{x^n}\, dx\,,$$

ce qui fournit l'expression désirée par un simple calcul de résidus. □

Ajoutons à présent l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSE 2. *L'origine est une singularité intégrable de $\mathcal{B}(a)$.*

Nous pouvons écrire sous ces conditions l'égalité:

$$\int_\gamma e^{-x\xi} \mathcal{B}(a)(\xi)\, d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi}\, \widehat{a}(\xi)\, d\xi\,,$$

de sorte que le résultat qui suit est un simple corollaire du théorème 2.

COROLLAIRE 7.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a:*

$$a(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\xi}\, \widehat{a}(\xi)\, d\xi$$

pour tout x dans l'ouvert V_β, où la fonction analytique $\widehat{a}$ désigne le mineur de a.

7.5. QUELQUES PROPRIÉTÉS

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème 2.

PROPOSITION 7.3. *L'opérateur de dérivation ∂ se transforme par $\mathcal{B}$ en l'opérateur de multiplication par $-\xi$,*

$$\textit{Dérivation} \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \quad \textit{multiplication par } (-\xi)\,,$$

tandis que l'opérateur de translation E^ω de vecteur $\omega > 0$ se transforme par $\mathcal{B}$ en l'opérateur de multiplication par $e^{-\omega\xi}$,

$$\textit{Translation} \quad E^\omega \quad \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \quad \textit{multiplication par } (e^{-\omega\xi})\,.$$

RÉFÉRENCES

[AV] APOSTOL, T. M. and T. H. VU. Dirichlet series related to the Riemann zeta function. *Journal of Number Theory 19* (1984), 85–102.

[B1] BERNDT, B. C. *Ramanujan's Notebooks*, Part I. Springer Verlag, New York, 1985.

[B2] —— *Ramanujan's Notebooks*, Part II. Springer Verlag, New York, 1989.

[Bo] BOAS, R. P. *Entire Functions.* Academic Press, New York, 1954.

[BB] BORWEIN, D., P. BORWEIN and R. GIRGENSOHN. Explicit evaluation of Euler sums. *Proc. Edinburgh Math. Soc. 38* (1995), 277–294.

[C] CARTIER, P. An introduction to zeta functions, in *From Number Theory to Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1992.