

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 43 (1997)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA SOMMATION DE RAMANUJAN  
**Autor:** Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.  
**Kapitel:** 7.4. Le cas intégrable  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

En intégrant  $\xi \rightarrow e^{(y-x)\xi}$  le long de  $\gamma_+$  et de  $\gamma_-$ , on obtient :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d_+} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy + \frac{1}{2i\pi} \int_{d_-} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

Si  $C_R$  désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy :

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

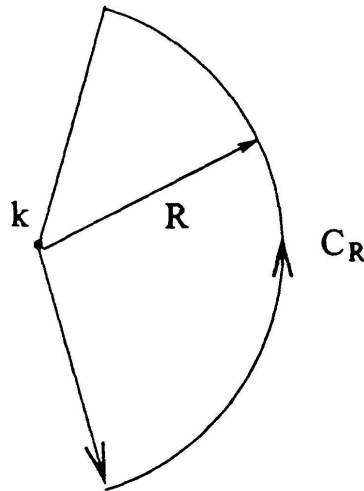


FIGURE 4

En faisant tendre  $R$  vers l'infini on voit que  $\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = a(x)$  pour tout  $x \in S$ .  $\square$

#### 7.4. LE CAS INTÉGRABLE

Supposons que la fonction  $a$  appartienne à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$  ( $r \geq 0$ ) où  $V_\beta$  désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid -\beta < \text{Arg}(x) < \beta\},$$

avec  $\pi/2 < \beta < \pi$ .

Reprenons les notations de la sous-section 7.2; en particulier  $U_r(\theta)$  désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant  $\mathcal{B}_k(a)$  de la transformée de Borel de  $a$  se prolonge analytiquement :

– sur l'ouvert

$$U_r^+ := \bigcup_{\theta \in [-\beta, 0]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée  $\mathcal{B}_k^+(a) \in \mathcal{O}(U_r^+)^{\exp(k)}$  ;

– sur l'ouvert

$$U_r^- := \bigcup_{\theta \in [0, \beta]} U_r(\theta)$$

en une fonction notée  $\mathcal{B}_k^-(a) \in \mathcal{O}(U_r^-)^{\exp(k)}$  (voir figure 5).

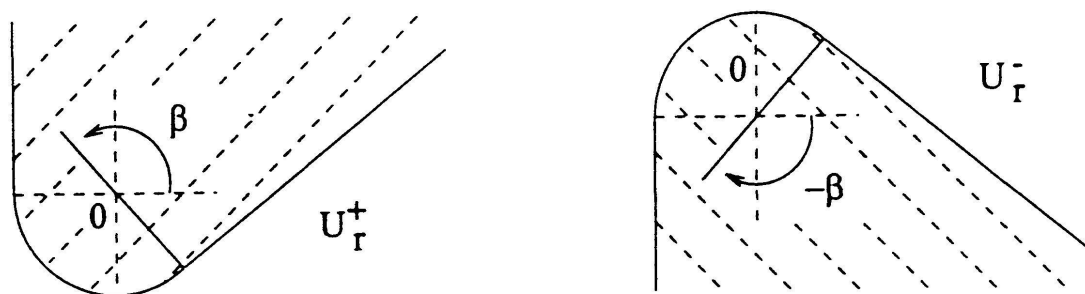


FIGURE 5

Faisons à présent l'hypothèse suivante :

**HYPOTHÈSE 1.** *La fonction  $\mathcal{B}_k^+(a)$  (resp.  $\mathcal{B}_k^-(a)$ ) se prolonge analytiquement dans l'ouvert  $U_0^+$  (resp.  $U_0^-$ ).*

Désignons alors par  ${}^*U^\beta$  le voisinage sectoriel de l'infini défini par  ${}^*U^\beta := U_0^+ \cap U_0^-$ . Une application du théorème de Cauchy montre alors la proposition suivante.

**PROPOSITION 7.1.** *Sous les hypothèses précédentes, la fonction  $\widehat{a}$ , appelée le mineur de  $a$ , définie pour  $\xi \in {}^*U^\beta$  par :  $\widehat{a}(\xi) = \mathcal{B}_k^+(a)(\xi) - \mathcal{B}_k^-(a)(\xi)$ , ne dépend pas de  $k$  et on a :*

$$\widehat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{x\xi} a(x) dx,$$

où  $\Gamma$  est le chemin représenté sur la figure 6. De plus,  $\widehat{a} \in \mathcal{O}({}^*U^\beta)^{\exp(0)}$ .

Le fait que  $\widehat{a}$  appartienne à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}({}^*U^\beta)^{\exp(0)}$  est une conséquence directe des propriétés de croissance à l'infini de  $\mathcal{B}_k^+(a)$  et  $\mathcal{B}_k^-(a)$  en faisant tendre  $k$  vers zéro.

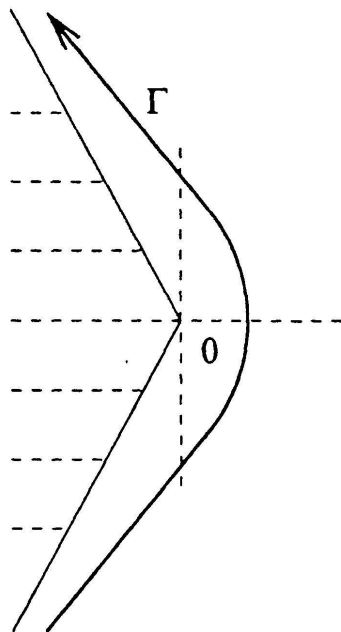


FIGURE 6

PROPOSITION 7.2. Si la fonction  $a$  possède un développement  $a(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$  convergent à l'infini, alors la fonction  $\hat{a}$  est entière et  $\hat{a}(\xi) = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}$ .

*Démonstration.* Le développement  $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n}$  est uniformément convergent pour  $|x| > R$ . En prenant pour contour  $\Gamma$  un cercle de centre 0 et de rayon  $R' > R$ , on a :

$$\hat{a}(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{x\xi} \sum_{n \geq 1} a_n \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n \geq 1} a_n \int_{\Gamma} e^{-x\xi} \frac{1}{x^n} dx,$$

ce qui fournit l'expression désirée par un simple calcul de résidus.  $\square$

Ajoutons à présent l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 2. L'origine est une singularité intégrable de  $B(a)$ .

Nous pouvons écrire sous ces conditions l'égalité :

$$\int_{\gamma} e^{-x\xi} B(a)(\xi) d\xi = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \hat{a}(\xi) d\xi,$$

de sorte que le résultat qui suit est un simple corollaire du théorème 2.

COROLLAIRE 7.1. *Sous les hypothèses précédentes, on a :*

$$a(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\xi} \widehat{a}(\xi) d\xi$$

pour tout  $x$  dans l'ouvert  $V_\beta$ , où la fonction analytique  $\widehat{a}$  désigne le mineur de  $a$ .

## 7.5. QUELQUES PROPRIÉTÉS

La proposition suivante est une conséquence immédiate du théorème 2.

PROPOSITION 7.3. *L'opérateur de dérivation  $\partial$  se transforme par  $\mathcal{B}$  en l'opérateur de multiplication par  $-\xi$ ,*

$$\text{Dérivation } \frac{\partial}{\partial x} \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \text{ multiplication par } (-\xi),$$

tandis que l'opérateur de translation  $E^\omega$  de vecteur  $\omega > 0$  se transforme par  $\mathcal{B}$  en l'opérateur de multiplication par  $e^{-\omega\xi}$ ,

$$\text{Translation } E^\omega \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{B}}{\rightleftharpoons}} \text{ multiplication par } (e^{-\omega\xi}).$$

## RÉFÉRENCES

- [AV] APOSTOL, T. M. and T. H. VU. Dirichlet series related to the Riemann zeta function. *Journal of Number Theory* 19 (1984), 85–102.
- [B1] BERNDT, B. C. *Ramanujan's Notebooks*, Part I. Springer Verlag, New York, 1985.
- [B2] ——— *Ramanujan's Notebooks*, Part II. Springer Verlag, New York, 1989.
- [Bo] BOAS, R. P. *Entire Functions*. Academic Press, New York, 1954.
- [BB] BORWEIN, D., P. BORWEIN and R. GIRGENSOHN. Explicit evaluation of Euler sums. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 38 (1995), 277–294.
- [C] CARTIER, P. An introduction to zeta functions, in *From Number Theory to Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1992.