

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 43 (1997)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA SOMMATION DE RAMANUJAN  
**Autor:** Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.  
**Kapitel:** 7.3. Transformation de Laplace  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

LEMME 7.2. *On suppose que  $a$  appartient à l'espace  $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$ . Alors  $\mathcal{B}_k(a)$  définit une fonction holomorphe dans l'ouvert  $U_r \times D$ ; de plus pour tout fermé  $S'$  contenu dans l'ouvert  $U_r$ , pour tout compact  $K \subset D$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $C = C(S', K, \epsilon) > 0$  tel que pour tout  $\xi \in S'$  on ait la majoration (uniforme en  $z$ ):*

$$|\mathcal{B}_k(a)(\xi, z)| \leq Ce^{(k+\epsilon)|\xi|}.$$

*Autrement dit,  $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$ .*

$$\text{De plus si } z = (z_1, \dots, z_n), \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \mathcal{B}_k(a) = \mathcal{B}_k\left(\frac{\partial}{\partial z_i} a\right).$$

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.1 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.  $\square$

### 7.3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

#### 7.3.1. Transformée de Laplace

DÉFINITION 4. Soit  $k \geq 0$  et  $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ , où  $U_r$  est le voisinage sectoriel introduit précédemment. On définit la transformée de Laplace de  $f$  par :

$$\mathcal{L}f(x) = \int_{\gamma} e^{-x\xi} f(\xi) d\xi,$$

où  $\gamma$  est le chemin représenté sur la figure 2.

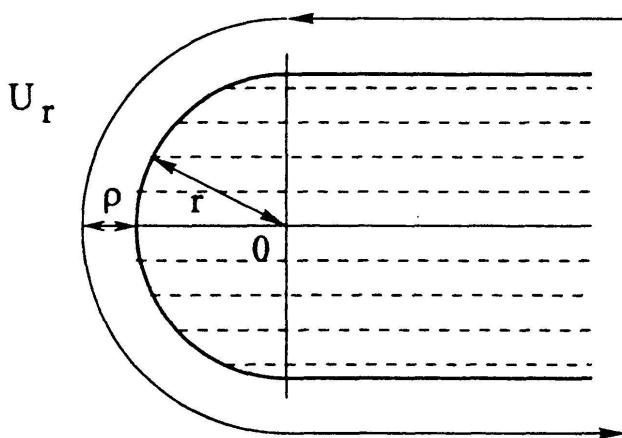


FIGURE 2

Remarquons tout de suite que l'hypothèse de croissance faite sur  $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$  implique (en utilisant les mêmes arguments qu'à la sous-

section précédente) l'analyticité de  $\mathcal{L}f$  dans l'ouvert  $P_k$  du plan complexe des  $x$ , voisinage sectoriel de l'infini défini par

$$P_k := \{x \in \mathbf{C} \mid \Re(x) > k\}.$$

L'étude sur sa croissance à l'infini est l'objet du lemme suivant :

**LEMME 7.3.** *Si  $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$  alors la fonction  $\mathcal{L}f$  appartient à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(P_k)^{\exp(r)}$ .*

*Démonstration.* Pour montrer que  $\mathcal{L}f$  est de type exponentiel dans l'ouvert  $P_k$ , considérons un demi-plan fermé  $S$  contenu dans cet ouvert : pour  $\epsilon > 0$  assez petit nous pouvons supposer que le secteur fermé  $S$  est inclus dans le domaine des  $x$  tels que la condition

$$\Re(x) \geq (k + \epsilon)$$

soit satisfaite. En utilisant notre liberté de déformation du chemin  $\gamma$  à l'aide d'une homotopie laissant invariantes les directions à l'infini nous pouvons aussi supposer que  $\gamma$  s'écrit comme la somme :

- du chemin compact orienté  $C(r + \rho)$  consistant à parcourir le demi-cercle situé dans le domaine  $\Re(\xi) \leq 0$ , de rayon  $\alpha + \rho$ , où  $\rho$  est un réel positif que l'on peut prendre *aussi petit* que l'on veut;
- de la réunion de deux demi-droites orientées  $\gamma(r + \rho)$  et  $\overline{\gamma(r + \rho)}$ , demi-droites horizontales dont la première est d'extrémité  $i(r + \rho)$  et la seconde d'origine  $-i(r + \rho)$ .

Considérons l'intégrale sur  $\gamma(r + \rho)$ ,

$$\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi) d\xi = e^{-ix(r+\rho)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t + i(r + \rho)) dt.$$

Suivant notre hypothèse sur  $f$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \geq 0$ , on ait :

$$|f(t + i(r + \rho))| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)} e^{-\epsilon t/2} e^{(k+\epsilon)t},$$

de sorte que pour tout  $x \in S$ ,

$$|e^{-xt} f(t + i(r + \epsilon))| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)} e^{-\epsilon t/2},$$

et par conséquent pour tout  $x \in S$ ,

$$\left| \int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi) d\xi \right| \leq \frac{2Ce^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}}{\epsilon} e^{(r+\rho)|x|}.$$

L'intégrale sur  $\overline{\gamma(r + \rho)}$  se traite de la même façon, avec une conclusion identique. En ce qui concerne l'intégrale sur le chemin compact  $C(r + \rho)$ , il suffit de majorer le module de  $f$  par une constante (par compacité) pour conclure.  $\square$

### 7.3.2. Dépendance suivant un paramètre

La transformation de Laplace «à paramètre» ne pose pas de difficulté particulière : avec les notations de la sous-section précédente énonçons le

**LEMME 7.4.** *Si  $f \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$  où  $D$  un ouvert de  $\mathbf{C}^n$ , la fonction  $\mathcal{L}f$  définit une fonction holomorphe dans l'ouvert  $P_k \times D$ ; de plus pour tout demi-plan fermé  $S \subset P_k$ , pour tout compact  $K \subset D$  et pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe une constante  $C = C(S, K, \epsilon) > 0$  telle que pour tout  $x \in S$ , on ait la majoration (uniforme en  $z$ ):*

$$|\mathcal{L}f(x, z)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|},$$

autrement dit:  $\mathcal{L}f \in \mathcal{O}_D(P_k)^{\exp(r)}$ .

$$\text{De plus si } z = (z_1, \dots, z_n), \quad \frac{\partial}{\partial z_i} \mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial z_i} f\right).$$

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.3 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue.  $\square$

### 7.3.3. La transformation de Laplace-Borel

Le lemme qui suit est une simple remarque.

**LEMME 7.5.** *Si  $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$ , on a  $\mathcal{L}f = 0$ .*

Mais cela nous permet de définir sans ambiguïté la transformée de Laplace  $\mathcal{LB}(a)$  de la transformée de Borel d'un élément  $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ : pour tout  $k > 0$ ,

$$\mathcal{LB}(a) := \mathcal{LB}_k(a).$$

Par conséquent,  $\mathcal{LB}(a)$  définit une fonction analytique dans l'ouvert  $P$  (faire tendre  $k$  vers 0). Plus précisément:

THÉORÈME 2. Soit  $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ . Alors

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a)) = a$$

dans l'ouvert  $P$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in S$  où  $S$  est le secteur fermé de l'ouvert  $P$  représenté sur la figure 3. D'après les définitions de  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{B}$  on a:

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = \int_{\gamma} e^{-x\xi} \mathcal{B}(a)(\xi) d\xi$$

où  $\mathcal{B}(a)(\xi)$  est défini par :

$$\mathcal{B}(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d+} e^{y\xi} a(y) dy$$

si  $\xi$  est sur  $\gamma_+$ , et par :

$$\mathcal{B}(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d-} e^{y\xi} a(y) dy$$

si  $\xi$  est sur  $\gamma_-$ , où les chemins  $d_+$ ,  $d_-$ ,  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  sont représentés sur la figure 3. On a donc :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = \int_{\gamma_+} e^{-x\xi} \frac{-1}{2i\pi} \int_{d+} e^{y\xi} a(y) dy d\xi + \int_{\gamma_-} e^{-x\xi} \frac{-1}{2i\pi} \int_{d-} e^{y\xi} a(y) dy d\xi.$$

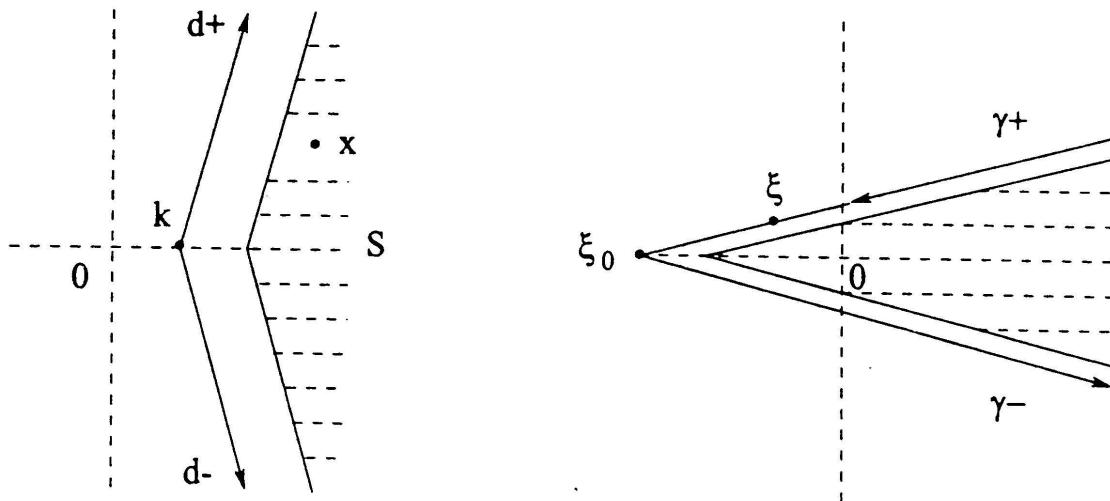


FIGURE 3

Cela donne en permutant l'ordre d'intégration :

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d+} \int_{\gamma_+} e^{(y-x)\xi} d\xi a(y) dy - \frac{1}{2i\pi} \int_{d-} \int_{\gamma_-} e^{(y-x)\xi} d\xi a(y) dy.$$

En intégrant  $\xi \rightarrow e^{(y-x)\xi}$  le long de  $\gamma_+$  et de  $\gamma_-$ , on obtient:

$$\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{d+} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy + \frac{1}{2i\pi} \int_{d-} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

Si  $C_R$  désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy :

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\xi_0}}{y-x} a(y) dy.$$

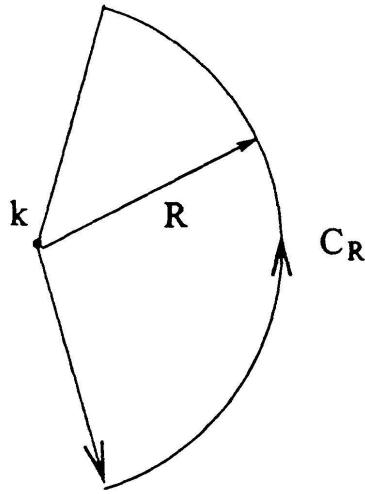


FIGURE 4

En faisant tendre  $R$  vers l'infini on voit que  $\mathcal{L}(\mathcal{B}(a))(x) = a(x)$  pour tout  $x \in S$ .  $\square$

#### 7.4. LE CAS INTÉGRABLE

Supposons que la fonction  $a$  appartienne à l'espace vectoriel  $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$  ( $r \geq 0$ ) où  $V_\beta$  désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C} \setminus \{0\} \mid -\beta < \text{Arg}(x) < \beta\},$$

avec  $\pi/2 < \beta < \pi$ .

Reprendons les notations de la sous-section 7.2; en particulier  $U_r(\theta)$  désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant  $\mathcal{B}_k(a)$  de la transformée de Borel de  $a$  se prolonge analytiquement: