Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 7.3. Transformation de Laplace
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

LEMME 7.2. *On suppose que a appartient à l'espace* $\mathcal{O}_D(P)^{\exp(r)}$. *Alors* $\mathcal{B}_k(a)$ *définit une fonction holomorphe dans l'ouvert* $U_r \times D$ *; de plus pour tout fermé* S' *contenu dans l'ouvert* U_r*, pour tout compact* $K \subset D$ *et pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $C = C(S', K, \epsilon) > 0$ *tel que pour tout* $\xi \in S'$ *on ait la majoration (uniforme en* z*) :*

$$|\mathcal{B}_k(a)\,(\xi, z)| \le C e^{(k+\epsilon)|\xi|} .$$

Autrement dit, $\mathcal{B}_k(a) \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$.

De plus si $z = (z_1, \dots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}} \mathcal{B}_k(a) = \mathcal{B}_k\left(\frac{\partial}{\partial_{z_i}} a\right)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.1 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

7.3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

7.3.1. *Transformée de Laplace*

DÉFINITION 4. Soit $k \ge 0$ et $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$, où U_r est le voisinage sectoriel introduit précédemment. On définit la transformée de Laplace de f par :

$$\mathcal{L}f(x) = \int_\gamma e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi ,$$

où γ est le chemin représenté sur la figure 2.

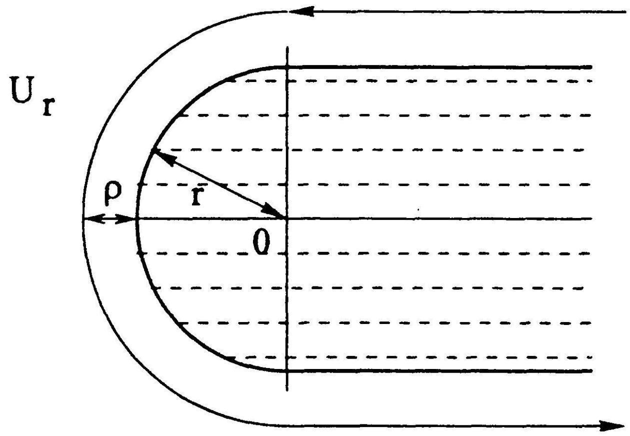

FIGURE 2

Remarquons tout de suite que l'hypothèse de croissance faite sur $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ implique (en utilisant les mêmes arguments qu'à la sous-section précédente) l'analyticité de $\mathcal{L}f$ dans l'ouvert P_k du plan complexe des x, voisinage sectoriel de l'infini défini par

$$P_k := \{x \in \mathbf{C} \mid \Re(x) > k\}.$$

L'étude sur sa croissance à l'infini est l'objet du lemme suivant:

LEMME 7.3. *Si $f \in \mathcal{O}(U_r)^{\exp(k)}$ alors la fonction $\mathcal{L}f$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P_k)^{\exp(r)}$.*

Démonstration. Pour montrer que $\mathcal{L}f$ est de type exponentiel dans l'ouvert P_k, considérons un demi-plan fermé S contenu dans cet ouvert: pour $\epsilon > 0$ assez petit nous pouvons supposer que le secteur fermé S est inclus dans le domaine des x tels que la condition

$$\Re(x) \geq (k + \epsilon)$$

soit satisfaite. En utilisant notre liberté de déformation du chemin γ à l'aide d'une homotopie laissant invariantes les directions à l'infini nous pouvons aussi supposer que γ s'écrit comme la somme:

- du chemin compact orienté $C(r+\rho)$ consistant à parcourir le demi-cercle situé dans le domaine $\Re(\xi) \leq 0$, de rayon $\alpha + \rho$, où ρ est un réel positif que l'on peut prendre *aussi petit* que l'on veut;
- de la réunion de deux demi-droites orientées $\gamma(r+\rho)$ et $\overline{\gamma(r+\rho)}$, demi-droites horizontales dont la première est d'extrémité $i(r+\rho)$ et la seconde d'origine $-i(r+\rho)$.

Considérons l'intégrale sur $\gamma(r+\rho)$,

$$\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi = e^{-ix(r+\rho)} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f\big(t + i(r+\rho)\big)\, dt\,.$$

Suivant notre hypothèse sur f, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, on ait:

$$\left|f\big(t + i(r+\rho)\big)\right| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}\, e^{-\epsilon t/2}\, e^{(k+\epsilon)t}\,,$$

de sorte que pour tout $x \in S$,

$$\left|e^{-xt} f\big(t + i(r+\varepsilon)\big)\right| \leq C e^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}\, e^{-\epsilon t/2}\,,$$

et par conséquent pour tout $x \in S$,

$$\left|\int_{\gamma(r+\rho)} e^{-x\xi} f(\xi)\, d\xi\right| \leq \frac{2Ce^{(k+\epsilon/2)(r+\rho)}}{\epsilon}\, e^{(r+\rho)|x|}\,.$$

L'intégrale sur $\overline{\gamma(r+\rho)}$ se traite de la même façon, avec une conclusion identique. En ce qui concerne l'intégrale sur le chemin compact $C(r+\rho)$, il suffit de majorer le module de f par une constante (par compacité) pour conclure. □

7.3.2. *Dépendance suivant un paramètre*

La transformation de Laplace « à paramètre » ne pose pas de difficulté particulière : avec les notations de la sous-section précédente énonçons le

LEMME 7.4. *Si $f \in \mathcal{O}_D(U_r)^{\exp(k)}$ où D un ouvert de $\mathbf{C}^n$, la fonction $\mathcal{L}f$ définit une fonction holomorphe dans l'ouvert $P_k \times D$; de plus pour tout demi-plan fermé $S \subset P_k$, pour tout compact $K \subset D$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C = C(S, K, \epsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait la majoration (uniforme en z) :*

$$|\mathcal{L}f(x, z)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|},$$

autrement dit : $\mathcal{L}f \in \mathcal{O}_D(P_k)^{\exp(r)}$.

De plus si $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\frac{\partial}{\partial_{z_i}}\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial_{z_i}}f\right)$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du lemme 7.3 et de conclure par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. □

7.3.3. *La transformation de Laplace-Borel*

Le lemme qui suit est une simple remarque.

LEMME 7.5. *Si $f \in \mathcal{O}(\mathbf{C})^{\exp}$, on a $\mathcal{L}f = 0$.*

Mais cela nous permet de définir sans ambiguïté la transformée de Laplace $\mathcal{LB}(a)$ de la transformée de Borel d'un élément $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$: pour tout $k > 0$,

$$\mathcal{LB}(a) := \mathcal{LB}_k(a).$$

Par conséquent, $\mathcal{LB}(a)$ définit une fonction analytique dans l'ouvert P (faire tendre k vers 0). Plus précisément :

THÉORÈME 2. *Soit* $a \in \mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$. *Alors*

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big) = a$$

dans l'ouvert P.

Démonstration. Soit $x \in S$ où S est le secteur fermé de l'ouvert P représenté sur la figure 3. D'après les définitions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{B}$ on a:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = \int_\gamma e^{-x\xi}\mathcal{B}(a)(\xi)\, d\xi$$

où $\mathcal{B}(a)(\xi)$ est défini par:

$$B(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+} e^{y\xi}\, a(y)\, dy$$

si ξ est sur γ_+, et par:

$$B(a)(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d-} e^{y\xi}\, a(y)\, dy$$

si ξ est sur γ_-, où les chemins d_+ , d_- , γ_+ et γ_- sont représentés sur la figure 3. On a donc:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = \int_{\gamma+} e^{-x\xi}\frac{-1}{2i\pi}\int_{d+} e^{y\xi}\, a(y)\, dyd\xi + \int_{\gamma-} e^{-x\xi}\frac{-1}{2i\pi}\int_{d-} e^{y\xi}\, a(y)\, dyd\xi\,.$$

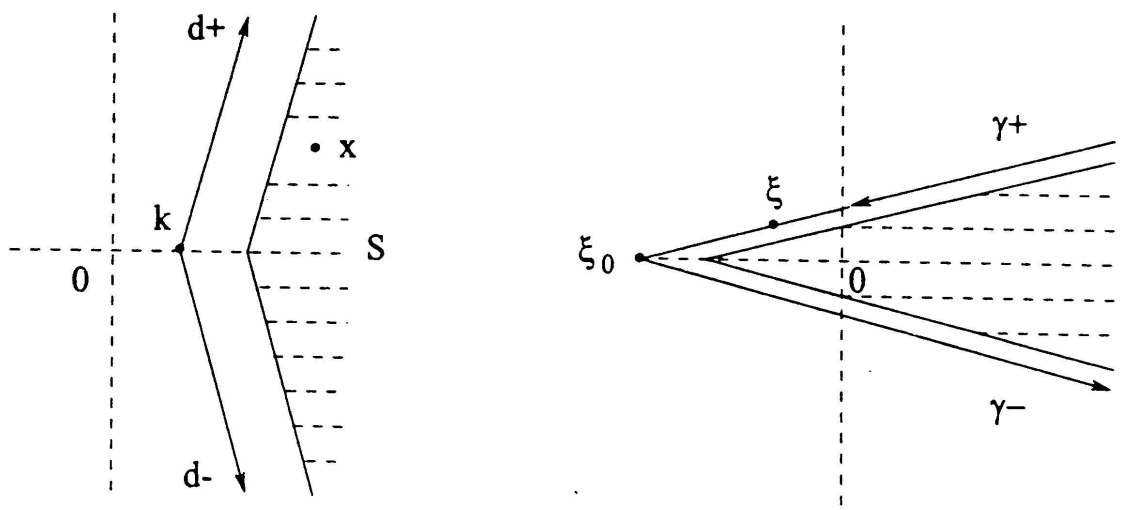

FIGURE 3

Cela donne en permutant l'ordre d'intégration:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+}\int_{\gamma+} e^{(y-x)\xi}\, d\xi a(y)\, dy - \frac{1}{2i\pi}\int_{d-}\int_{\gamma-} e^{(y-x)\xi}\, d\xi a(y)\, dy\,.$$

En intégrant $\xi \to e^{(y-x)\xi}$ le long de γ_+ et de γ_-, on obtient:

$$\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{d+} \frac{e^{(y-x)\,\xi_0}}{y-x}\,a(y)\,dy + \frac{1}{2i\pi}\int_{d-} \frac{e^{(y-x)\,\xi_0}}{y-x}\,a(y)\,dy\,.$$

Si C_R désigne le lacet représenté sur la figure 4, on a d'après la formule de Cauchy:

$$a(x) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_R} \frac{e^{(y-x)\,\xi_0}}{y-x}\,a(y)\,dy\,.$$

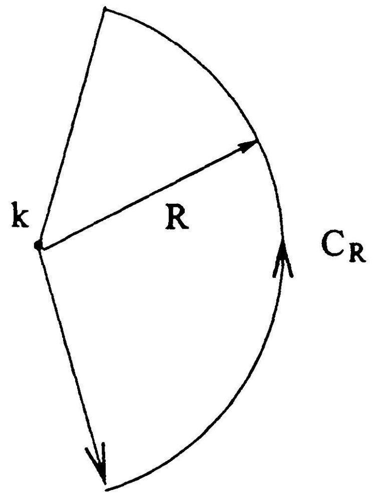

FIGURE 4

En faisant tendre R vers l'infini on voit que $\mathcal{L}\big(\mathcal{B}(a)\big)(x) = a(x)$ pour tout $x \in S$. $\square$

7.4. Le cas intégrable

Supposons que la fonction a appartienne à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(V_\beta)^{\exp(r)}$ $(r \geq 0)$ où V_β désigne l'ouvert

$$V_\beta := \{x \in \mathbf{C}\backslash\{0\} \mid -\beta < \mathcal{A}rg(x) < \beta\}\,,$$

avec $\pi/2 < \beta < \pi$.
Reprenons les notations de la sous-section 7.2; en particulier $U_r(\theta)$ désigne le demi-plan

$$U_r(\theta) := \{\xi \in \mathbf{C} \mid \Re(e^{i\theta}\xi) < -r\}\,.$$

En adaptant les résultats de 7.2 on voit que le représentant $\mathcal{B}_k(a)$ de la transformée de Borel de a se prolonge analytiquement: