Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 7.1. Notations

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

7. Appendice : Transformation de Laplace-Borel

Dans cet appendice, on donne une présentation de la transformation de Laplace-Borel bien adaptée au cadre de cet article. Pour un exposé plus systématique, le lecteur pourra se référer par exemple à [M].

7.1. Notations

Soit U un voisinage sectoriel de l'infini d'ouverture $\geq \pi$ du plan $\mathbf{C}$ de la variable complexe x. Nous désignons par $\mathcal{O}(U)$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans l'ouvert U du plan complexe.

Nous dirons que $a \in \mathcal{O}(U)$ est de *type exponentiel* $r \geq 0$ *dans* U si pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout demi-plan fermé $S \in U$ il existe une constante $C = C(S, \epsilon) > 0$ telle que pour tout $x \in S$, on ait la majoration :

$$|a(x)| \leq Ce^{(r+\epsilon)|x|}\,.$$

L'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{O}(U)$ de type exponentiel $r \geq 0$ dans U forme un espace vectoriel que nous noterons $\mathcal{O}(U)^{\exp(r)}$. L'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{O}(U)$ de type exponentiel quelconque forme quant à lui une algèbre que l'on note $\mathcal{O}(U)^{\exp}$.

7.2. Transformation de Borel

7.2.1. *Transformée de Borel*

Soit P l'ouvert du plan complexe défini par $P := \{x \mid \Re(x) > 0\}$. Considérons l'application analytique $x \mapsto a(x)$ que l'on suppose appartenir à l'espace vectoriel $\mathcal{O}(P)^{\exp(r)}$ $(r \geq 0)$. Soit dans ces conditions d une demi-droite (orientée vers l'infini) dans l'ouvert P. On définit la *transformée de Borel* $\mathcal{B}_d$ associée à d par :

$$\mathcal{B}_d(a)\,(\xi) = -\frac{1}{2i\pi}\int_d e^{x\xi} a(x)\,dx\,.$$

Pour fixer les idées, on notera k l'origine de la demi-droite d'intégration et l'on supposera que $k \in]0, 1]$. On identifiera la direction à l'infini de cette demi-droite $d = d(\theta)$ via son angle polaire θ, $|\theta| \leq \pi/2$. La transformée de Borel $\mathcal{B}_d(a)$ s'écrit alors

$$-\frac{1}{2i\pi}\int_{d(\theta)} e^{x\xi} a(x)\,dx = -\frac{1}{2i\pi} e^{k\xi}\int_0^{+\infty} e^{te^{i\theta}\xi}\, a(k + te^{i\theta})\, e^{i\theta}\,dt\,.$$