Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{B}}(-1)^k\left(\zeta(k+1)-\frac{1}{k}\right)=\ln(2)-1\,,$$

où $\sum^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel de la série.

6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan

Étant donnée une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction a telle que $a(n)=a_n$ pour tout $n\geq 1$. On a la *formule d'interpolation de Newton*:

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n)\,.$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences n-ièmes:

$$\Delta^n a(1)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\,C_n^k\,a_{k+1}\,.$$

Du développement de Newton de a :

$$a(x)=a(1)+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}(x-1)(x-2)\dots(x-n)\,,$$

on déduit formellement l'égalité:

$$\sum_{k\geq 1}a(k)=a(1)\sum_{k\geq 1}1+\sum_{n\geq 1}\frac{\Delta^n a(1)}{n!}\sum_{k\geq 1}(k-1)(k-2)\dots(k-n)\,.$$

Calculons à présent $\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}}(k-1)(k-2)\dots(k-n)$. De l'équation aux différences:

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)-x(x-1)\dots(x-n)=-(n+1)(x-1)\dots(x-n)\,,$$

il découle que:

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)}=-\frac{1}{n+1}(x-1)(x-2)\dots(x-n-1)+I_{n+1}/(n+1)\,,$$

avec:

$$I_{n+1}=\int_0^1 x(x-1)\dots(x-n)dx\,.$$

On a donc:

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n) = \frac{I_{n+1}}{n+1},$$

et

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} 1 = I_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot$$

De plus, les intégrales I_{n+1} sont données par la fonction génératrice:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!} z^n = \frac{1}{\ln(1+z)} - \frac{1}{z}\,.$$

PROPOSITION 6.1. *Si a est une fonction analytique bornée dans le demi-plan P, alors:*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \frac{I_{n+1}}{n+1}\,.$$

Démonstration. On commence par démontrer le

LEMME 6.1. *Si a est une fonction analytique bornée dans le demi-plan P, alors les $\Delta^n a(1)$ forment une suite bornée.*

Démonstration. Par le théorème des résidus on a:

$$\Delta^n a(1) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma_n} \frac{a(x)}{(x-1)\dots\big(x-(n+1)\big)}\,dx\,,$$

où γ_n est le lacet entourant les points $1, 2, \dots, n+1$ composé d'un segment vertical passant par le point $\frac{1}{2}$ et du cercle de centre $n+1$ et de rayon $n+1$. Sur le cercle, on a:

$$|(x-1)\dots(x-(n+1)| \geq (n+1)!\,,$$

et sur le segment, on a

$$|(x-1)\dots(x-(n+1)| \geq \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\,.$$

La majoration de $\Delta^n a(1)$ provient du fait que le cercle est de longueur $2\pi(n+1)$ et que le segment est de longueur $< 2\sqrt{n+1}$ ce qui permet de majorer l'intégrale sur le segment à l'aide de la formule de Stirling. □

La série $\sum_{n\geq 0}\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\Delta^n a(1)$ est absolument convergente car les $\Delta^n a(1)$ sont majorés par une constante et la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente (par un théorème taubérien classique). D'autre part, d'après des propriétés connues des séries de Newton (cf. [G]) la fonction :

$$x \mapsto -\sum_{n\geq 0}\frac{\Delta^n a(1)}{(n+1)!}(x-1)(x-2)\dots\big(x-(n+1)\big)+\sum_{n\geq 0}\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\Delta^n a(1)$$

vérifie les trois propriétés caractéristiques de la fonction R_a. □

EXEMPLE 14. D'après le calcul de $\Delta^n a$ pour $a(x)=\frac{1}{x}$:

$$\Delta^n a(x)=(-1)^n\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)},$$

il vient :

$$\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}}\frac{1}{n+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}\frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

Pour tout entier $N\geq 2$, on en déduit, d'après l'exemple 9 (cf. §4.2), l'égalité :

$$\gamma=1+\dots+\frac{1}{N-1}-\ln(N)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{N(N+1)\dots(N+n)}\frac{I_{n+1}}{(n+1)}.$$

REMARQUE 11. De la relation :

$$x^k=1+\sum_{n=1}^{n=k}S_k^n(x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

avec :

$$S_k^n=\frac{1}{n!}\Delta^n x^k(1)=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}C_n^p\,(p+1)^k,$$

on déduit, en prenant la somme de Ramanujan des deux membres, la relation :

$$\frac{1-B_{k+1}}{k+1}=\sum_{n=0}^{n=k}S_k^n\frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

REMARQUE 12. Le développement formel de R_a :

$$R_a(x) = -\int_1^x a(t)dt - \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(x)\,,$$

permet d'écrire formellement l'égalité :

$$R_a(1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = -\sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(1)\,.$$

En général, la série de droite diverge au sens de Cauchy. Cependant, on pourrait montrer que sous certaines hypothèses sur a, cette série est Borel-sommable et que

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = -\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{B}} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(1)\,,$$

où $\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel. Par exemple :

$$\gamma = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^n \frac{B_n}{nN^n}\,.$$

D'autre part, on a vu (cf. proposition 6.1) que sous certaines hypothèses, on a :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\, \Delta^n a(1)\,.$$

Remarquons que l'égalité formelle :

$$-\sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n a(1) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\, \Delta^n a(1)$$

peut se déduire directement des développements formels :

$$\frac{I}{e^{\partial} - I} = \frac{I}{\partial} + \sum_{n\geq 0} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!}\, \partial^n\,,$$

$$\frac{I}{\ln(I+\Delta)} = \frac{I}{\Delta} + \sum_{n\geq 0} \frac{I_{n+1}}{(n+1)!}\, \Delta^n\,,$$

ainsi que de la relation :

$$\partial = \ln E = \ln(I + \Delta)\,.$$