

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 5. Exemples d'utilisation
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

vérifiée pour $\Re(z) > 1$, par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$. La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à z . \square

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour $z = 1$ en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164):

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (z-1)^k \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n}.$$

5. EXEMPLES D'UTILISATION

5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION ψ

La fonction ψ vérifie l'équation :

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z}.$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. § 3.1), on a pour $\Re(z) > -1$:

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z}.$$

Supposons $|z| < 1$ et posons $f(x) = \frac{x}{1+xz}$, on a

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction f :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k,$$

de rayon de convergence $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$, permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k \geq 1} (-1)^k z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right).$$

On en déduit le développement de ψ :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k \geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k) z^{k-1}.$$

5.2. CALCUL DE $\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n)$

PROPOSITION 5.1. *Si q désigne un entier naturel ≥ 1 , alors :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \frac{1}{(2q+1)} \langle B_{2q+1}, \psi \rangle,$$

avec

$$\langle B_{2q+1}, \psi \rangle = \int_0^1 B_{2q+1}(x) \psi(x) dx.$$

Démonstration. On commence par montrer le

LEMME 5.1. *Si a est telle que $a(0) = \partial a(0) = \dots = \partial^{2q-1} a(0) = 0$, alors*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \int_0^1 a(t) dt + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) R_{\partial^{2q+1} a}(x) dx.$$

Démonstration. Soit $A(x) = \int_0^x a(t) dt$. On applique la formule d'Euler-MacLaurin avec reste intégral sur $[0, 1]$ à la fonction R_A . Il vient :

$$\frac{\partial R_A(0) + \partial R_A(1)}{2} = \sum_{n \geq 1}^q \left[\frac{B_{2n}}{2n!} \partial^{2n} R_A \right]_0^1 + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) \partial^{2q+2} R_A(x) dx.$$

Comme $[\partial^{2n} R_A]_0^1 = 0$ pour tout $n \leq q$, on a :

$$\frac{\partial R_A(0) + \partial R_A(1)}{2} = \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) \partial^{2q+2} R_A(x) dx.$$

En utilisant la propriété $R_{\partial^n f} = \partial^n R_f + \partial^{n-1} f(1)$, on obtient :

$$R_a(1) = \int_0^1 a(t) dt + \frac{1}{(2q+1)!} \int_0^1 B_{2q+1}(x) R_{\partial^{2q+1} a}(x) dx. \quad \square$$

On applique le lemme à la fonction $a(x) = x^{2q} \ln(x)$, cette fonction vérifie

$$\int_0^1 a(t) dt = -\frac{1}{(2q+1)^2} \quad \text{et} \quad \partial^{2q+1} a(x) = \frac{(2q)!}{x}. \quad \square$$

REMARQUE 9. D'après le corollaire 4.1 (cf. §4.7), on a aussi :

$$\sum_{n=1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \zeta'(-2q).$$

En dérivant l'équation fonctionnelle de la fonction ζ :

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right),$$

on obtient pour q entier ≥ 1 l'égalité (cf. [B1] pp. 273–276) :

$$\sum_{n=1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} + (-1)^{q+1} \frac{(2q)!}{2(2\pi)^{2q}} \zeta(2q+1).$$

De la proposition précédente, on déduit alors l'égalité :

$$\langle B_{2q+1}, \psi \rangle = \frac{(-1)^q}{2} (2q+1) \frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}} \zeta(2q+1).$$

REMARQUE 10. Pour $|x| < 1$, on a le développement :

$$-\frac{\pi}{2} \cot(\pi x) = -\frac{1}{2x} + \sum_{k \geq 1} \zeta(2k) x^{2k-1}.$$

Posons :

$$f(x) = -\frac{1}{2x} - \gamma - \sum_{k \geq 1} \zeta(2k+1) x^{2k}.$$

D'après le développement de ψ vu au paragraphe précédent, on a la décomposition :

$$\psi(x) = f(x) - \frac{\pi}{2} \cot(\pi x).$$

La fonction $x \mapsto \cot(\pi x)$ est une fonction impaire par rapport au point $\frac{1}{2}$. De la formule de réflexion :

$$\psi(1-x) = \psi(x) + \pi \cot(\pi x),$$

on déduit que la fonction f est une fonction paire par rapport au point $\frac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto B_{2q+1}(x)$ étant impaire par rapport au point $\frac{1}{2}$, il résulte alors de la décomposition de ψ précédente les égalités :

$$\langle B_{2q+1}, \psi \rangle = -\frac{\pi}{2} \langle B_{2q+1}, \cot(\pi x) \rangle \quad \text{et} \quad \langle B_{2q+1}, f \rangle = 0,$$

ce qui se traduit par les deux systèmes infinis d'équations :

$$\sum_{k \geq 1} \zeta(2k) \langle x^{2k-1}, B_{2q+1} \rangle = r_q + \frac{(-1)^q}{2} (2q+1) \frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}} \zeta(2q+1),$$

$$\sum_{k \geq 1} \zeta(2k+1) \langle x^{2k}, B_{2q+1} \rangle = -r_q,$$

avec $r_q = \langle \frac{1}{2x}, B_{2q+1} \rangle$.

5.3. UNE SOLUTION DE L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

En dérivant sous le signe $\sum^{\mathcal{R}}$, on vérifie aisément que la fonction

$$u(t, x, y) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4(n+t)}}$$

est solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u.$$

D'après le noyau de l'équation de la chaleur, on en déduit que

$$u(1, 0, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbf{R}}^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} u(0, x, y) dx dy,$$

c'est-à-dire, après passage en coordonnées polaires :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1} = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} du.$$

Or, d'après l'exemple 13 (cf. §4.6), on sait que :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) \frac{u^k}{k!},$$

et d'autre part :

$$\gamma = 1 - \ln(2) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit l'identité :

$$\ln(2) - 1 = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) \frac{u^k}{k!} du,$$

qui traduit le fait que la série $\sum_{k \geq 1} (-1)^k (\zeta(k+1) - \frac{1}{k})$ est Borel-sommable et que

$$\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) = \ln(2) - 1,$$

où $\sum^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel de la série.

6. INTERPOLATION DE NEWTON ET SOMMATION DE RAMANUJAN

Étant donnée une suite $(a_n)_{n \geq 1}$, il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction a telle que $a(n) = a_n$ pour tout $n \geq 1$. On a la *formule d'interpolation de Newton*:

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n).$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences n -ièmes :

$$\Delta^n a(1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k a_{k+1}.$$

Du développement de Newton de a :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n),$$

on déduit formellement l'égalité :

$$\sum_{k \geq 1} a(k) = a(1) \sum_{k \geq 1} 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \sum_{k \geq 1} (k-1)(k-2)\dots(k-n).$$

Calculons à présent $\sum_{k \geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n)$. De l'équation aux différences :

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1) - x(x-1)\dots(x-n) = -(n+1)(x-1)\dots(x-n),$$

il découle que :

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = -\frac{1}{n+1} (x-1)(x-2)\dots(x-n-1) + I_{n+1}/(n+1),$$

avec :

$$I_{n+1} = \int_0^1 x(x-1)\dots(x-n) dx.$$

On a donc :