Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 5. Exemples d'utilisation

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

vérifiée pour $\Re(z) > 1$, par prolongement analytique elle est donc vraie pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$. La seconde égalité s'obtient par dérivation par rapport à z. $\square$

REMARQUE 8. Les formules précédentes restent valables pour $z = 1$ en remplaçant les membres de droite par leurs limites en 1, et on a le développement (cf. [B1] p. 164):

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)^k}{n} \cdot$$

5. EXEMPLES D'UTILISATION

5.1. DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE LA FONCTION ψ

La fonction ψ vérifie l'équation:

$$\psi(z+1) = \psi(z) + \frac{1}{z} \cdot$$

Par ailleurs, d'après l'exemple 6 (cf. §3.1), on a pour $\Re(z) > -1$:

$$\psi(1+z) = \ln(1+z) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} \cdot$$

Supposons $|z| < 1$ et posons $f(x) = \frac{x}{1+xz}$, on a

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot$$

Le développement en série entière en 0 de la fonction f :

$$\frac{x}{1+xz} = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1} z^{k-1} x^k ,$$

de rayon de convergence $\rho = \frac{1}{|z|} > 1$, permet d'écrire la somme de Ramanujan de cette série sous la forme:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+z} = \gamma + \sum_{k\geq 1} (-1)^k z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) \cdot$$

On en déduit le développement de ψ :

$$\psi(z) = -\frac{1}{z} - \gamma - \sum_{k\geq 2} (-1)^{k-1} \zeta(k)\, z^{k-1} .$$

5.2. Calcul de $\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q}\ln(n)$

Proposition 5.1. *Si q désigne un entier naturel ≥ 1, alors:*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q}\ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \frac{1}{(2q+1)}\langle B_{2q+1},\psi\rangle\,,$$

avec

$$\langle B_{2q+1},\psi\rangle = \int_0^1 B_{2q+1}(x)\,\psi(x)\,dx\,.$$

Démonstration. On commence par montrer le

Lemme 5.1. *Si a est telle que $a(0)=\partial a(0)=\cdots=\partial^{2q-1}a(0)=0$, alors*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \int_0^1 a(t)\,dt + \frac{1}{(2q+1)!}\int_0^1 B_{2q+1}(x)\,R_{\partial^{2q+1}a}(x)\,dx\,.$$

Démonstration. Soit $A(x)=\int_0^x a(t)\,dt$. On applique la formule d'Euler-MacLaurin avec reste intégral sur $[0,1]$ à la fonction R_A. Il vient:

$$\frac{\partial R_A(0)+\partial R_A(1)}{2} = \sum_{n\geq 1}^{q}\left[\frac{B_{2n}}{2n!}\,\partial^{2n}R_A\right]_0^1 + \frac{1}{(2q+1)!}\int_0^1 B_{2q+1}(x)\,\partial^{2q+2}R_A(x)\,dx\,.$$

Comme $[\partial^{2n}R_A]_0^1=0$ pour tout $n\leq q$, on a:

$$\frac{\partial R_A(0)+\partial R_A(1)}{2} = \frac{1}{(2q+1)!}\int_0^1 B_{2q+1}(x)\,\partial^{2q+2}R_A(x)\,dx\,.$$

En utilisant la propriété $R_{\partial^n f}=\partial^n R_f+\partial^{n-1}f(1)$, on obtient:

$$R_a(1) = \int_0^1 a(t)\,dt + \frac{1}{(2q+1)!}\int_0^1 B_{2q+1}(x)\,R_{\partial^{2q+1}a}(x)\,dx\,. \qquad \square$$

On applique le lemme à la fonction $a(x)=x^{2q}\ln(x)$, cette fonction vérifie

$$\int_0^1 a(t)\,dt = -\frac{1}{(2q+1)^2} \quad \text{et} \quad \partial^{2q+1}a(x) = \frac{(2q)!}{x}\,. \qquad \square$$

REMARQUE 9. D'après le corollaire 4.1 (cf. §4.7), on a aussi :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} - \zeta'(-2q) .$$

En dérivant l'équation fonctionnelle de la fonction ζ :

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\,\zeta(1-z)\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) ,$$

on obtient pour q entier ≥ 1 l'égalité (cf. [B1] pp. 273–276) :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^{2q} \ln(n) = -\frac{1}{(2q+1)^2} + (-1)^{q+1}\frac{(2q)!}{2(2\pi)^{2q}}\,\zeta(2q+1) .$$

De la proposition précédente, on déduit alors l'égalité :

$$\langle B_{2q+1}, \psi\rangle = \frac{(-1)^q}{2}\,(2q+1)\,\frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\,\zeta(2q+1) .$$

REMARQUE 10. Pour $|x| < 1$, on a le développement :

$$-\frac{\pi}{2}\cot(\pi x) = -\frac{1}{2x} + \sum_{k\geq 1} \zeta(2k)\,x^{2k-1} .$$

Posons :

$$f(x) = -\frac{1}{2x} - \gamma - \sum_{k\geq 1} \zeta(2k+1)\,x^{2k} .$$

D'après le développement de ψ vu au paragraphe précédent, on a la décomposition :

$$\psi(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}\cot(\pi x) .$$

La fonction $x \mapsto \cot(\pi x)$ est une fonction impaire par rapport au point $\frac{1}{2}$. De la formule de réflexion :

$$\psi(1-x) = \psi(x) + \pi\cot(\pi x) ,$$

on déduit que la fonction f est une fonction paire par rapport au point $\frac{1}{2}$. La fonction $x \mapsto B_{2q+1}(x)$ étant impaire par rapport au point $\frac{1}{2}$, il résulte alors de la décomposition de ψ précédente les égalités :

$$\langle B_{2q+1}, \psi\rangle = -\frac{\pi}{2}\langle B_{2q+1}, \cot(\pi x)\rangle \quad \text{et} \quad \langle B_{2q+1}, f\rangle = 0 ,$$

ce qui se traduit par les deux systèmes infinis d'équations :

$$\sum_{k\geq 1} \zeta(2k)\left\langle x^{2k-1}, B_{2q+1}\right\rangle = r_q + \frac{(-1)^q}{2}(2q+1)\frac{(2q)!}{(2\pi)^{2q}}\zeta(2q+1),$$

$$\sum_{k\geq 1} \zeta(2k+1)\left\langle x^{2k}, B_{2q+1}\right\rangle = -r_q,$$

avec $r_q = \left\langle \frac{1}{2x}, B_{2q+1}\right\rangle$.

5.3. Une solution de l'équation de la chaleur

En dérivant sous le signe $\sum^{\mathcal{R}}$, on vérifie aisément que la fonction

$$u(t,x,y) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4(n+t)}}$$

est solution de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t u = \partial^2_{xx} u + \partial^2_{yy} u .$$

D'après le noyau de l'équation de la chaleur, on en déduit que

$$u(1,0,0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}}^{2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} u(0,x,y)\, dxdy,$$

c'est-à-dire, après passage en coordonnées polaires :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1} = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}}\, du .$$

Or, d'après l'exemple 13 (cf. §4.6), on sait que :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{u}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) \frac{u^k}{k!},$$

et d'autre part :

$$\gamma = 1 - \ln(2) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+1} .$$

On en déduit l'identité :

$$\ln(2) - 1 = \int_0^\infty e^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) \frac{u^k}{k!}\, du,$$

qui traduit le fait que la série $\sum_{k\geq 1}(-1)^k\big(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\big)$ est Borel-sommable et que

$$\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{B}} (-1)^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) = \ln(2) - 1 \,,$$

où $\sum^{\mathcal{B}}$ désigne la somme de Borel de la série.

6. Interpolation de Newton et sommation de Ramanujan

Étant donnée une suite $(a_n)_{n\geq 1}$, il est très facile, par l'intermédiaire des séries de Newton, de construire formellement une fonction a telle que $a(n) = a_n$ pour tout $n \geq 1$. On a la *formule d'interpolation de Newton*:

$$a(x) = a(1) + \sum_{n\geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n) \,.$$

Cette formule fait intervenir le calcul des différences n-ièmes:

$$\Delta^n a(1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \, a_{k+1} \,.$$

Du développement de Newton de a :

$$a(x) = a(1) + \sum_{n\geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} (x-1)(x-2)\dots(x-n) \,,$$

on déduit formellement l'égalité:

$$\sum_{k\geq 1} a(k) = a(1) \sum_{k\geq 1} 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\Delta^n a(1)}{n!} \sum_{k\geq 1} (k-1)(k-2)\dots(k-n) \,.$$

Calculons à présent $\sum_{k\geq 1}^{\mathcal{R}} (k-1)(k-2)\dots(k-n)$. De l'équation aux différences:

$$(x-1)(x-2)\dots(x-n-1) - x(x-1)\dots(x-n) = -(n+1)(x-1)\dots(x-n) \,,$$

il découle que:

$$R_{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = -\frac{1}{n+1} (x-1)(x-2)\dots(x-n-1) + I_{n+1}/(n+1) \,,$$

avec:

$$I_{n+1} = \int_0^1 x(x-1)\dots(x-n)dx \,.$$

On a donc: