Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 4.6. Utilisations de développements en série entière
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\big(\gamma + \ln(2)\big) - 1 + \frac{1}{2}\ln(3)\,.$$

4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si a est la fonction entière de type exponentiel $\tau < \pi$ définie par :*

$$a(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \textit{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k\,,$$

alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t)\,dt - \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}\,.$$

Démonstration. Montrons que $R_a = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$. On sait que $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$. Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)\,.$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n\,,$$

on constate que pour $\tau < r < \pi$, il existe une constante C_r telle que pour tout x, on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|}\,(k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent R_a. $\square$

EXEMPLE 12. Pour $0 < y < \pi$, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$:

$$\frac{\sin(xy)}{x} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} y^{2k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \frac{1}{2} y .$$

REMARQUE 6. La série précédente converge également au sens de Cauchy, et la relation de la proposition 3.3 s'écrit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)}{n} = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} + \int_y^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx - \frac{1}{2} y = \frac{\pi - y}{2} .$$

REMARQUE 7. La proposition précédente ne s'applique pas si l'on ne suppose pas la fonction a entière. Par exemple, si on l'appliquait à la fonction $x \mapsto \frac{x^{2q+1}y}{e^{xy}-1}$ avec q entier > 0 et $y > 0$, le développement en série entière:

$$x^{2q} \frac{xy}{e^{xy}-1} = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k}{k!} x^{2q} x^k y^k \quad (|x| < 2\pi)$$

permettrait d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1}\, dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

En fait, cette formule n'est pas valable car d'après l'exemple 8 (cf. §3.2), on a la relation:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y^{2q+1}} \int_y^{\infty} \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1}\, dt ,$$

ce qui donnerait:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1}y}{e^{ny}-1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1}\, dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

Or, cette relation est fausse, comme on le voit en faisant tendre y vers l'infini. Remarquons que pour $y = 2\pi$ et $q = 2p$, la relation précédente donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{2} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{4p+2} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

alors que l'on a (cf. [B2] p. 256 et p. 262) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{4} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{8p+4} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

PROPOSITION 4.6. *Soit $f(x) = \sum_{k\geq 1} c_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 1$. On suppose que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} f(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^k} = c_1\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}\left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right).$$

Démonstration. Posons $a(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On a le développement convergent à l'infini :

$$a(x) = \sum_{n\geq 1} c_n \frac{1}{x^n}.$$

Le mineur de a est donc la fonction entière de type exponentiel $1/\rho < 1$:

$$\widehat{a}(\xi) = \sum_{k\geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Par définition de la somme de Ramanujan, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\widehat{a}(\xi)\,d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\sum_{k\geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\,d\xi. \end{aligned}$$

L'hypothèse $\rho > 1$ permet de majorer les $|c_k|$ et ainsi de permuter les signes $\int$ et $\sum$ dans la formule précédente. Il vient alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{+\infty} e^{-\xi}\left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right)\frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!}\,d\xi. \qquad \square$$

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto xe^{-zx}$:

$$xe^{-zx} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k}\right) \cdot$$

4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. *Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $a(z,x)$ analytique dans $D \times P$. On suppose que pour tout compact $K \subset D$, il existe des constantes C_K et $\tau_K < \pi$ telles que pour tout $x \in P$ avec $|x| > 1$ et tout $z \in K$ on ait $|a(z,x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$. Alors $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n)$ est analytique dans D. De plus, on a :*

$$\partial_z \left(\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n) \right) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z,n) \,.$$

Démonstration. On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de a tel que pour tout $z \in K \subset D$ (où K est un compact quelconque), on ait $|\mathcal{B}(a)(z,x)| \leq Ce^{k|z|}$ avec $0 < k < 1$. Soit $R_a(z,1) = \int_\gamma e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi}\right) \mathcal{B}(a)(\xi)\, d\xi$. Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre z, la fonction à intégrer étant majorée uniformément en $z \in K$ par une fonction intégrable. □

COROLLAIRE 4.1. *La fonction $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est une fonction entière. Pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$, on a :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1},$$

$$-\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} = \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2} \cdot$$

Démonstration. Le fait que $z \mapsto \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est analytique dans $\mathbf{C}$ est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant