Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 4.6. Utilisations de développements en série entière

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\big(\gamma + \ln(2)\big) - 1 + \frac{1}{2}\ln(3)\,.$$

4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si a est la fonction entière de type exponentiel $\tau < \pi$ définie par :*

$$a(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \textit{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k\,,$$

alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t)\,dt - \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}\,.$$

Démonstration. Montrons que $R_a = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$. On sait que $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$. Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)\,.$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n\,,$$

on constate que pour $\tau < r < \pi$, il existe une constante C_r telle que pour tout x, on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|}\,(k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent R_a. □

EXEMPLE 12. Pour $0 < y < \pi$, le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{\sin(xy)}{x}$:

$$\frac{\sin(xy)}{x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k} y^{2k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} = \int_0^y \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{1}{2} y .$$

REMARQUE 6. La série précédente converge également au sens de Cauchy, et la relation de la proposition 3.3 s'écrit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ny)}{n} = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\sin(ny)}{n} + \int_y^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx - \frac{1}{2} y = \frac{\pi - y}{2} .$$

REMARQUE 7. La proposition précédente ne s'applique pas si l'on ne suppose pas la fonction a entière. Par exemple, si on l'appliquait à la fonction $x \mapsto \frac{x^{2q+1} y}{e^{xy}-1}$ avec q entier > 0 et $y > 0$, le développement en série entière:

$$x^{2q} \frac{xy}{e^{xy} - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^{2q} x^k y^k \quad (|x| < 2\pi)$$

permettrait d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1} dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

En fait, cette formule n'est pas valable car d'après l'exemple 8 (cf. § 3.2), on a la relation:

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} - \frac{1}{y^{2q+1}} \int_y^{\infty} \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1} dt ,$$

ce qui donnerait:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2q+1} y}{e^{ny} - 1} = \frac{1}{y^{2q+1}} \int_0^y \frac{t^{2q+1}}{e^t - 1} dt + \frac{B_{2q+1}}{2q+1} + \frac{B_{2q+2}}{4q+4} y .$$

Or, cette relation est fausse, comme on le voit en faisant tendre y vers l'infini. Remarquons que pour $y = 2\pi$ et $q = 2p$, la relation précédente donne :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{2} - \frac{1}{4\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{4p+2} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

alors que l'on a (cf. [B2] p. 256 et p. 262) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4p+1}}{e^{2\pi n} - 1} = \begin{cases} \frac{B_2}{4} - \frac{1}{8\pi} & \text{si } p = 0 \\ \frac{B_{4p+2}}{8p+4} & \text{si } p \geq 1 \end{cases}$$

PROPOSITION 4.6. *Soit* $f(x) = \sum_{k \geq 1} c_k x^k$ *une série entière de rayon de convergence* $\rho > 1$. *On suppose que la fonction* $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ *est analytique de type exponentiel* $\alpha < \pi$ *dans le demi-plan* P, *alors :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} f(1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^k} = c_1 \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) .$$

Démonstration. Posons $a(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On a le développement convergent à l'infini :

$$a(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \frac{1}{x^n} .$$

Le mineur de a est donc la fonction entière de type exponentiel $1/\rho < 1$:

$$\widehat{a}(\xi) = \sum_{k \geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} .$$

Par définition de la somme de Ramanujan, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left(\frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \widehat{a}(\xi) \, d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left(\frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \sum_{k \geq 1} c_k \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \, d\xi . \end{aligned}$$

L'hypothèse $\rho > 1$ permet de majorer les $|c_k|$ et ainsi de permuter les signes $\int$ et $\sum$ dans la formule précédente. Il vient alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_0^{+\infty} e^{-\xi} \left(\frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \frac{\xi^{k-1}}{(k-1)!} \, d\xi . \qquad \square$$

EXEMPLE 13. Le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto xe^{-zx}$:

$$xe^{-zx} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} z^k x^{k+1}$$

permet d'écrire la somme de Ramanujan:

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{n}} = \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} z^k \left(\zeta(k+1) - \frac{1}{k} \right) .$$

4.7. DÉPENDANCE ANALYTIQUE PAR RAPPORT À UN PARAMÈTRE

PROPOSITION 4.7. *Soit D un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $a(z,x)$ analytique dans $D \times P$. On suppose que pour tout compact $K \subset D$, il existe des constantes C_K et $\tau_K < \pi$ telles que pour tout $x \in P$ avec $|x| > 1$ et tout $z \in K$ on ait $|a(z,x)| \leq C_K e^{\tau_K |x|}$. Alors $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n)$ est analytique dans D. De plus, on a:*

$$\partial_z \left(\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(z,n) \right) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \partial_z a(z,n) .$$

Démonstration. On sait (cf. appendice) qu'on peut choisir un représentant de la transformée de Borel de a tel que pour tout $z \in K \subset D$ (où K est un compact quelconque), on ait $|\mathcal{B}(a)(z,x)| \leq Ce^{k|z|}$ avec $0 < k < 1$. Soit $R_a(z,1) = \int_\gamma e^{-\xi} \left(\frac{1}{1-e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) \mathcal{B}(a)(\xi) \, d\xi$. Cette intégrale dépend analytiquement du paramètre z, la fonction à intégrer étant majorée uniformément en $z \in K$ par une fonction intégrable. $\square$

COROLLAIRE 4.1. *La fonction $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est une fonction entière. Pour tout $z \in \mathbf{C} - \{1\}$, on a:*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z} = \zeta(z) - \frac{1}{z-1} ,$$

$$-\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{\ln(n)}{n^z} = \zeta'(z) + \frac{1}{(z-1)^2} .$$

Démonstration. Le fait que $z \mapsto \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n^z}$ est analytique dans $\mathbf{C}$ est une conséquence immédiate de la proposition précédente. La première égalité étant