

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN
Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.
Kapitel: 4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} \operatorname{Li}_2(t) dt = \zeta(2) \frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarithme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) \operatorname{Li}_2(t) dt = \gamma \zeta(2) - \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)} \right) \operatorname{Li}_2(t) dt.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a , on peut écrire :

$$\begin{aligned} R_a(2x) - R_a(2x+1) &= a(2x), \\ R_a(2x+1) - R_a(2(x+1)) &= a(2x+1). \end{aligned}$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a(2(x+1)) = a(2x) + a(2x+1).$$

On a donc :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} (a(2n) + a(2n+1)) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t) dt,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. \square

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}(\gamma + \ln(2)) - 1 + \frac{1}{2} \ln(3).$$

4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si a est la fonction entière de type exponentiel $\tau < \pi$ définie par :*

$$a(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \text{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k,$$

alors :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t) dt - \frac{1}{2} \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}.$$

Démonstration. Montrons que $R_a = \sum_{k \geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$. On sait que $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$. Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x).$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n,$$

on constate que pour $\tau < r < \pi$, il existe une constante C_r telle que pour tout x , on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|} (k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent R_a . \square