REMARQUE 5. D'après la formule :

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t)\, dt = \zeta(2)\frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarithme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt = \gamma\zeta(2) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. *Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a :*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a, on peut écrire :

$$R_a(2x) - R_a(2x+1) = a(2x),$$
$$R_a(2x+1) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x+1).$$

En ajoutant, on obtient :

$$R_a(2x) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x) + a(2x+1).$$

On a donc :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(a(2n) + a(2n+1)\big) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt.$$

Par la propriété de linéarité, il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. $\square$

EXEMPLE 11.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\big(\gamma + \ln(2)\big) - 1 + \frac{1}{2}\ln(3)\,.$$

4.6. UTILISATIONS DE DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE

PROPOSITION 4.5. *Si a est la fonction entière de type exponentiel $\tau < \pi$ définie par :*

$$a(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} x^k \quad \textit{avec} \quad |\alpha_k| \leq C\tau^k\,,$$

alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} n^k = \int_0^1 a(t)\,dt - \frac{1}{2}\alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k-1}}{(2k)!} B_{2k}\,.$$

Démonstration. Montrons que $R_a = \sum_{k\geq 0} \frac{\alpha_k}{k!} R_{x^k}$. On sait que $R_{x^k} = \frac{1-B_{k+1}(x)}{k+1}$. Considérons la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)\,.$$

En utilisant la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n\geq 0} \frac{B_n(x)}{n!} t^n\,,$$

on constate que pour $\tau < r < \pi$, il existe une constante C_r telle que pour tout x, on ait

$$|B_{k+1}(x)| \leq C_r r^{-k} e^{r|x|}\,(k+1)!$$

Ceci permet de vérifier que la fonction :

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(k+1)!} - \frac{\alpha_k}{(k+1)!} B_{k+1}(x)$$

vérifie les trois conditions qui caractérisent R_a. □