Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 4.4. Sommation par parties

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

PROPOSITION 4.1. *Pour tout entier $N > 1$,*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt\,.$$

Démonstration. En sommant pour $n = 1, \ldots, N-1$ l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n+1) = a(n)\,,$$

il vient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \cdots + a(N-1) + R_a(N)\,.$$

Il suffit alors (cf. proposition 3.1) de remplacer $R_a(N)$ par $\sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} a(n+N) - \int_1^N a(t)\,dt$. $\square$

EXEMPLE 9. Pour $N \geq 2$, on a :

$$\gamma = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = 1 + \cdots + \frac{1}{N-1} - \ln(N) + \sum_{n\geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n+N}\,.$$

4.3. DÉRIVATION

Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P, alors sa dérivée ∂a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi$ dans le demi-plan P. De plus, en dérivant l'équation aux différences, on obtient la relation :

$$R_{\partial a} = \partial(R_a) + a(1)\,,$$

où le terme $a(1)$ provient du fait que $\int_1^2 \partial(R_a)(t)\,dt = R_a(2) - R_a(1) = -a(1)$. Plus généralement, on montre par récurrence sur n que

$$R_{\partial^n a} = \partial^n(R_a) + \partial^{n-1} a(1)\,.$$

4.4. SOMMATION PAR PARTIES

Si a et b sont deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_a < \pi$ et $\alpha_b < \pi$ dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$, alors le produit ab est analytique de type exponentiel $\alpha \leq \alpha_a + \alpha_b$ dans le demi-plan P. Soient alors u et v deux fonctions analytiques de type exponentiel respectivement $\alpha_u < \pi$ et $\alpha_v < \pi$ dans le demi-plan P avec $\alpha_u + \alpha_v < \pi$. D'après les propriétés de linéarité et de translation vues aux paragraphes précédents, on a :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(u(n) - u(n+1)\big)\, v(n) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} u(n+1)\,\big(v(n+1) - v(n)\big) + u(1)\, v(1) - \int_1^2 u(t)\, v(t)\, dt\,.$$

Cette formule est pour la sommation de Ramanujan l'analogue de la classique formule de sommation par parties d'Abel. En particulier en remplaçant u par R_a, on obtient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\, v(n) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} R_a(n+1)\,\big(v(n+1) - v(n)\big) + R_a(1)\, v(1) - \int_1^2 R_a(t)\, v(t)\, dt\,.$$

En remplaçant à présent v par R_b dans la formule précédente, on obtient alors :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\, R_b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n)\, R_a(n) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\, b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) - \int_1^2 R_a(t)\, R_b(t)\, dt\,,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{1}^{n} b(k) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) \sum_{1}^{n} a(k) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\, b(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} b(n) + \int_1^2 R_a(t)\, R_b(t)]\, dt\,. \tag{1}$$

Cette dernière formule admet deux cas particuliers intéressants :

PROPOSITION 4.2.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{1}^{n} \partial a(k) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) \sum_{1}^{n} a(k) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\, \partial a(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial a(n) + \frac{1}{2} a(1)^2 - a(1) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,.$$

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = \partial a(x)$, et en utilisant la propriété de dérivation vue au §4.3, il vient :

$$\int_1^2 R_a(t)\, R_{\partial a}(t)\, dt = \int_1^2 R_a(t)\, \partial R_a(t)\, dt = \frac{1}{2}[R_a^2]_1^2 = \frac{1}{2}a(1)^2 - a(1) \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,. \quad \square$$

PROPOSITION 4.3.

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_{1}^{n} a(k) = \frac{3}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \partial^{-1} a(n)\,,$$

avec $\partial^{-1} a(x) = \int_1^x a(t)\, dt$.

Démonstration. En appliquant la formule (1) avec $b(x) = 1$, on obtient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} na(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \sum_{1}^{n} a(k) + \int_1^2 tR_a(t)\, dt = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n)\,.$$

Posons $A(x) = \int_1^x a(t)\, dt$. On a $\partial R_A = R_a$ de sorte que (en intégrant par parties)

$$\int_1^2 tR_a(t)\, dt = R_A(1)\,.$$

La proposition en résulte. $\square$

EXEMPLE 10. (Sommes harmoniques : cf. [B1] pp. 251–253, [AV], [BB]).

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} H_n = \frac{3}{2} \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} 1 - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \ln(n) = \frac{3}{2}\gamma + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(2\pi)\,,$$

$$2 \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n} = \zeta(2) - 1 + \gamma^2 + \int_1^2 \psi^2(t)\, dt\,,$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2} + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \gamma\zeta(2)\,,$$

avec :

$$H_n = \sum_{1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

REMARQUE 5. D'après la formule:

$$\int_0^1 t^{n-1} Li_2(t)\, dt = \zeta(2)\frac{1}{n} - \frac{H_n}{n^2},$$

où Li_2 désigne le dilogarithme (cf. [L] p. 20), on obtient en sommant:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt = \gamma\zeta(2) - \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{H_n}{n^2}\,.$$

Il en découle, d'après l'exemple précédent, la relation:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{k^2} = \zeta(3) - 1 + \int_0^1 \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{\ln(t)}\right) Li_2(t)\, dt\,.$$

4.5. SÉPARATION DES TERMES PAIRS ET IMPAIRS

PROPOSITION 4.4. *Si a est une fonction analytique de type exponentiel $\alpha < \pi/2$ dans le demi-plan $\{x \mid \Re(x) > 0\}$, on a:*

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) - a(1) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,.$$

Démonstration. D'après l'équation aux différences vérifiée par R_a, on peut écrire:

$$R_a(2x) - R_a(2x+1) = a(2x)\,,$$
$$R_a(2x+1) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x+1)\,.$$

En ajoutant, on obtient:

$$R_a(2x) - R_a\big(2(x+1)\big) = a(2x) + a(2x+1)\,.$$

On a donc:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} \big(a(2n) + a(2n+1)\big) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,.$$

Par la propriété de linéarité, il vient:

$$\sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n) + \sum_{n\geq 1}^{\mathcal{R}} a(2n+1) = R_a(2) - \int_1^2 R_a(2t)\, dt\,,$$

et de plus, $R_a(2) = R_a(1) - a(1)$. □