

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 43 (1997)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA SOMMATION DE RAMANUJAN  
**Autor:** Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.  
**Kapitel:** 3.2. Liens avec la sommation de Cauchy  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-63274>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Démonstration.* On considère la fonction  $b(y) = a(y + x - 1)$ . On a :

$$R_b(y) = R_a(y + x - 1) - \int_1^2 R_a(t + x - 1) dt = R_a(y + x - 1) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

D'où

$$R_b(1) = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n + x - 1) = R_a(x) - \int_x^{x+1} R_a(t) dt.$$

Or  $\frac{d}{dx} \int_x^{x+1} R_a(t) dt = -a(x)$ , et le résultat en découle.  $\square$

EXEMPLE 6.

$$\sum_{n \geq 0}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n + x} = \ln(x) - \psi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x\xi} \left( \frac{1}{1 - e^{-\xi}} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi.$$

### 3.2. LIENS AVEC LA SOMMATION DE CAUCHY

Dans ce paragraphe,  $a$  désigne une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ .

PROPOSITION 3.2. *Si  $R_a(x)$  tend vers une limite finie quand  $x \rightarrow \infty$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} a(n)$  converge au sens de Cauchy, et en notant  $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)$  sa somme de Cauchy, on a la relation :*

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N a(t) dt.$$

*Démonstration.* Soit  $N$  un entier naturel  $> 1$ . En sommant pour  $n = 1, \dots, N - 1$  l'équation :

$$R_a(n) - R_a(n + 1) = a(n),$$

il vient :

$$R_a(1) - R_a(N) = a(1) + \dots + a(N - 1).$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = a(1) + \dots + a(N - 1) + R_a(N).$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) + \lim_{N \rightarrow \infty} R_a(N).$$

En intégrant entre  $n$  et  $n + 1$  l'équation aux différences

$$R_a(x) - R_a(x + 1) = a(x),$$

puis en sommant pour  $n = 1, \dots, N - 1$ , il vient :

$$- \int_N^{N+1} R_a(t) dt = \int_1^N a(t) dt.$$

En faisant tendre  $N$  vers l'infini, on obtient la relation :

$$- \lim_{N \rightarrow \infty} R_a(N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N a(t) dt. \quad \square$$

REMARQUE 4. Si  $R_a(x) + \int_1^x a(t) dt$  tend vers zéro quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors la série  $\sum_{n \geq 1} (a(n) - \int_n^{n+1} a(t) dt)$  converge au sens de Cauchy, et on a :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a(n) - \int_n^{n+1} a(t) dt \right).$$

EXEMPLE 7.

$$\gamma = \sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \right).$$

La proposition 3.2 admet une sorte de réciproque :

PROPOSITION 3.3. Si la série  $\sum_{n \geq 0} a(n+x)$  converge (au sens de Cauchy) normalement sur tout compact de  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$  et y définit une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  alors :

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx.$$

Si on suppose en outre que  $\int_1^{\infty} a(t) dt$  converge alors :

$$R_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

En particulier, on a la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} a(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) - \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

*Démonstration.* La fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) - \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx$  vérifie clairement les trois conditions qui caractérisent la fonction  $R_a$ . De plus, on a :

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} a(n+x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 a(n+x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} a(t) dt = \int_1^{\infty} a(t) dt. \quad \square$$

EXEMPLE 8. En appliquant la proposition précédente à la fonction  $x \mapsto \frac{xy}{e^{xy}-1}$  avec  $y > 0$ , il vient la relation :

$$\sum_{n \geq 1}^{\mathcal{R}} \frac{ny}{e^{ny}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ny}{e^{ny}-1} - \frac{1}{y} \int_y^{\infty} \frac{t}{e^t-1} dt.$$

#### 4. PROPRIÉTÉS DE LA SOMMATION

##### 4.1. LINÉARITÉ

Si  $a$  et  $b$  sont deux fonctions analytiques de type exponentiel  $\alpha_a < \pi$  et  $\alpha_b < \pi$  respectivement dans le demi-plan  $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$ , alors pour tout  $\lambda, \mu$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $\lambda a + \mu b$  est une fonction analytique de type exponentiel (majoré par)  $\alpha := \text{Max}(\alpha_a, \alpha_b) < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a :

$$R_{\lambda a + \mu b} = \lambda R_a + \mu R_b.$$

Il en résulte que l'application qui à une série  $\sum a(n)$  associe sa somme de Ramanujan est  $\mathbf{C}$ -linéaire.

##### 4.2. TRANSLATION

Si  $a$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$ , alors pour tout entier  $N > 1$  la translatée  $E^N(a)$  est une fonction analytique de type exponentiel  $\alpha < \pi$  dans le demi-plan  $P$  et on a la