Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA SOMMATION DE RAMANUJAN

Autor: Candelpergher, B. / Coppo, M. A. / Delabaere, E.

Kapitel: 1. Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63274

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 93–132

LA SOMMATION DE RAMANUJAN

par B. CANDELPERGHER, M. A. COPPO et E. DELABAERE

RÉSUMÉ. Il s'agit de donner une présentation rigoureuse de la méthode de sommation de Ramanujan et d'étudier les propriétés de cette sommation.

1. INTRODUCTION

Au début du chapitre VIII de ses *Notebooks* (cf. [B1]), Ramanujan introduit un procédé de sommation des séries basé sur la formule sommatoire d'Euler-MacLaurin. Plus précisément, Ramanujan se sert de la formule de développement des sommes partielles:

$$a(1) + a(2) + \cdots + a(x-1) = C + \int a(x)\,dx + \sum_{k\geq 1} \frac{B_k}{k!}\,\partial^{k-1} a(x)$$

pour associer à la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ la constante C qu'il appelle la constante de la série. Ainsi, par exemple, la constante de la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est la constante d'Euler. Ramanujan observe que la constante C « a de mystérieuses relations avec la série », et qu'elle est « comme le centre de gravité d'un corps », aussi n'hésite-t-il pas à la substituer à la série. Le procédé de Ramanujan, implicitement employé par Euler pour sommer la série harmonique (cf. [E]), peut être justifié par des calculs formels (cf. § 2).

Dans [H], Hardy étudie ce procédé à l'aide de la formule d'Euler-MacLaurin, pour des séries liées à la fonction ζ, en laissant subsister une certaine ambiguïté sur la borne de l'intégrale.

Dans cet article, on donne une présentation rigoureuse du procédé de Ramanujan. Pour cela, on introduit un cadre analytique cohérent pour assurer

Mots-clés: Séries divergentes. Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin. Equation aux différences. Transformation de Laplace-Borel. Fonctions zêta.

qu'une série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ admet *une et une seule* somme de Ramanujan, celle-ci étant définie comme la valeur en 1 de l'unique solution de l'équation aux différences $R(x)-R(x+1) = a(x)$ vérifiant la condition : $\int_1^2 R(t)\,dt = 0$ (cf. § 3). Ceci permet de développer dans ce cadre les propriétés de cette sommation (cf. § 4) et d'établir un lien avec l'interpolation de Newton (cf. § 6).

Il convient de noter que le procédé de Ramanujan *n'est pas un procédé de sommation au sens usuel* : si la série $\sum_{n\geq 1} a(n)$ converge au sens habituel, sa somme de Cauchy (c'est-à-dire la limite de la suite des sommes partielles de la série) ne coïncide pas en général avec la somme de la série au sens de Ramanujan (cf. § 3.1, exemple 2). Les liens existant entre les deux procédés de sommation sont explicités au paragraphe 3.2.

2. Développements d'Euler-MacLaurin formels

Soit a une fonction analytique dans le demi-plan $P = \{x \mid \Re(x) > 0\}$. Dans cette partie, on considère la série

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = a(1) + a(2) + \dots$$

comme une expression formelle. Soit $R(x)$ le « reste de la série à l'ordre x » défini formellement par :

$$R(x) = \sum_{n\geq 0} a(n+x) = a(x) + a(x+1) + \dots .$$

Par définition de R, on a :

$$\sum_{n\geq 1} a(n) = R(1) ,$$

et la « fonction » R est solution formelle de l'équation aux différences :

$$R(x) - R(x+1) = a(x) .$$

Soit E l'opérateur de translation défini par $Ef(x) = f(x+1)$, que l'on peut encore écrire grâce à la formule de Taylor : $E = e^{\partial}$, $\partial := \partial_x$ désignant l'opérateur de dérivation ordinaire. Si I désigne l'opérateur d'identité, l'équation aux différences précédente peut s'écrire à l'aide des opérateurs E et I sous la forme :

$$(I-E)\,R = a .$$

En inversant, on obtient :