

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE KATO POUR LES ANNEAUX LOCAUX DE DIMENSION 2
Autor: Szamuely, Tamás
Kapitel: 5. Conclusion
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63273>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Pour (2), considérons le diagramme commutatif suivant, obtenu en superposant (4.1) et le diagramme analogue pour A° .

$$\begin{array}{ccccc}
 H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & H_p^\circ(X^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow h & \searrow \cong & \\
 H^3(K, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\hspace{3cm}} & H_p^\circ(X, \mu_m^{\otimes 2}) & & \\
 & \swarrow & & \swarrow \cong & \\
 & H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^\circ(\mathrm{Spec}(A_{p^\circ}^\circ)^h, \mu_m^{\otimes 2}) & \\
 & \downarrow f & & \swarrow \cong & \downarrow g \\
 & H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2}) & \xrightarrow{\cong} & H_p^\circ(\mathrm{Spec} A_p^h, \mu_m^{\otimes 2}) &
 \end{array}$$

Notre tâche est de montrer que l'homomorphisme h du diagramme est un isomorphisme ce qui équivaut à dire que f l'est. Mais par le th. 1, les groupes $H^3(K_p, \mu_m^{\otimes 2})$ et $H^3(K_{p^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2})$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$; reste donc à voir que ces isomorphismes sont compatibles avec f . Par construction, l'isomorphisme du th. 1 est obtenu comme le composé de deux résidus pour la suite spectrale de Hochschild-Serre, donc la compatibilité en question est évidente par fonctorialité.

5. CONCLUSION

Comme promis, on va maintenant construire, suivant Kato, un complexe en K -théorie de Milnor que l'on va ensuite comparer à travers le symbole cohomologique avec le complexe hypothétique du th. 2.

Soit B^h un anneau comme dans le lemme 3.2, K^h son corps de fractions. On suppose que le corps résiduel de B^h est parfait. (En fait, des hypothèses plus faibles suffisent, cf. la Remarque ci-dessous.) Si \mathfrak{q} parcourt les idéaux premiers de hauteur 1 de B^h , on définit le complexe

$$(M) \quad K_2(K^h) \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{\mathfrak{q}} K_1(\kappa(\mathfrak{q})) \xrightarrow{\beta} K_0(\mathbf{F}) \cong \mathbf{Z}$$

comme suit: l'homomorphisme α est somme directe des résidus de Milnor $\partial_{1,\mathfrak{q}}^M$ (cf. chap. 2) attachés aux valuations discrètes de K^h induites par les

divers \mathfrak{q} (on voit tout de suite qu'il n'y a qu'un nombre fini de résidus qui n'annulent pas un élément donné de $K_2(K^h)$), et $\beta = \sum f_{\mathfrak{q}} v_{\mathfrak{q}}$, où $v_{\mathfrak{q}}$ est la valuation induite sur le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{q})$ de \mathfrak{q} par l'idéal maximal de B^h , $f_{\mathfrak{q}}$ son degré résiduel. (En fait, $v_{\mathfrak{q}} = \partial_{0,v_{\mathfrak{q}}}^M$ et la multiplication par $f_{\mathfrak{q}}$ est précisément la norme $K_0(\kappa(v_{\mathfrak{q}})) \rightarrow K_0(\mathbf{F})$.)

LEMME 5.1. *(M) est un complexe.*

Démonstration. Par le lemme 3.2, le groupe multiplicatif de K^h est engendré par les unités de B^h , l'uniformisante π , la variable T et les éléments de la forme P/T^n , où P est un polynôme de Weierstrass de degré n . Il suffit donc de vérifier l'égalité $\beta\alpha(\langle a, b \rangle) = 0$ quand a et b sont parmi ces générateurs. Les cas où a ou b est une unité, ou bien $a = \pi$, $b = T$, sont triviaux. Si P est de Weierstrass, $\beta\alpha(\langle \pi, P \rangle) = n - e_{\mathfrak{q}} f_{\mathfrak{q}} = 0$, (où $e_{\mathfrak{q}}$ est l'indice de ramification de $v_{\mathfrak{q}}$) car \mathbf{F} est supposé parfait. Vu la multiplicativité et l'anticommunutativité des symboles $\langle a, b \rangle$ (cf. Bass-Tate [3]), il nous reste à traiter les cas où $a = P/T^n$, $b = Q/T^k$, ou bien $a = P/T^n$, $b = T$. Sur de tels $\langle a, b \rangle$ le résidu $\partial_{1,(\pi)}^M$ est trivial, donc on peut se borner aux autres places de K_h . Or elles peuvent être identifiées à des places du corps de fonctions $\mathbf{F}(T)$ par le morphisme naturel $\text{Spec } B_{\pi}^h \rightarrow \text{Spec } \mathbf{F}[T]$. Si v est une place de $\mathbf{F}(T)$, triviale sur \mathbf{F} , qui ne provient pas d'une place de B_{π}^h , on a, grâce à la normalisation par $1/T^n$,

$$\partial_{1,v}^M(\langle a, b \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } b = T \text{ et } v \text{ est la place à l'infini;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant si v_{π} est la valuation de k , \mathfrak{p} une place de $\mathbf{F}(T)$, $v_{\mathfrak{p}}$ le prolongement unique de v_{π} sur le corps résiduel $\kappa(\mathfrak{p})$ avec degré résiduel $f_{\mathfrak{p}}$, on a la formule $v_{\pi} \circ N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} = f_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}$, ce qui nous donne

$$\beta\alpha(\langle a, b \rangle) = v_{\pi} \circ \sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1,\mathfrak{p}}^M(\langle a, b \rangle)$$

où \mathfrak{p} parcourt les places de $\mathbf{F}(T)$ triviales sur \mathbf{F} (y compris la place à l'infini, car $v_{\pi}(1) = 0$). Mais la loi de réciprocité de Bass-Tate ([3], chap. I.5) nous dit que $\sum_{\mathfrak{p}} N_{\kappa(\mathfrak{p})/k} \circ \partial_{1,\mathfrak{p}}^M = 0$, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE. Le complexe du lemme peut être largement généralisé; en fait, il peut être construit pour n'importe quel anneau local noethérien excellent de dimension 2. Pour voir $\beta\alpha = 0$ dans ce cas, on montre d'abord par un argument de normes que l'on peut remplacer l'anneau par son complété, puis par un autre argument de normes et le théorème de Cohen on se réduit au cas de $O_k[[T]]$, ce qui se traite comme dans le lemme ci-dessus. On n'a pas besoin d'hypothèse sur le corps résiduel; le fait que l'anneau soit excellent assure la validité de la formule $n = ef$.

Enfin, nous signalons que Kato [7] définit un complexe encore plus général, pour n'importe quel schéma excellent, qui est un analogue du complexe de Gersten-Quillen en K -théorie de Milnor. Mais la vérification du fait que ce soit un complexe se réduit immédiatement au cas mentionné ci-dessus.

Maintenant rien ne nous empêche de finir la démonstration du th. 2. Soient A° , K° comme au chapitre précédent, $A^{\circ\circ}$ le hensélisé strict de A° avec corps de fractions K° . $A^{\circ\circ}$ n'est autre que le hensélisé de $O_k^{nr}[T]_{(\pi, T)}$, et comme on l'a déjà remarqué, $K^{\circ\circ}$ est de dimension cohomologique 2. Donc la suite spectrale de Hochschild-Serre induit un isomorphisme $H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2}))$. De même, si \mathfrak{p}° est un idéal premier de hauteur 1 de A° , la suite spectrale de Hochschild-Serre en cohomologie étale (cf. Milne [11], p. 106) induit un isomorphisme $H^3(K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}))$, car on a pour tout $i \geq 0$ des isomorphismes

$$(5.2) \quad H^i(K^{\circ\circ} \times_{K^\circ} K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \cong \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} \mid \mathfrak{p}^\circ} H^i(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^\circ, \mu_m^{\otimes 2})$$

(où les $\mathfrak{p}^{\circ\circ}$ sont les idéaux premiers de $A^{\circ\circ}$ au-dessus de \mathfrak{p}°) et les corps $K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}$ sont de dimension cohomologique 2. Quant à la vérification de (5.2), on peut supposer $i = 0$, puis remplacer les anneaux en question par leurs complétés, et alors on peut de nouveau invoquer [16], chap. I, par. 2.3, le théorème sur les extensions de valuations.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbf{F}, K_2(K^{\circ\circ})/m) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^1(\mathbf{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} \mid \mathfrak{p}^\circ} K_2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^\circ)/m) & \xrightarrow{\partial^M} & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \cong \\ H^1(\mathbf{F}, H^2(K^{\circ\circ}, \mu_m^{\otimes 2})) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^1(\mathbf{F}, \bigoplus_{\mathfrak{p}^{\circ\circ} \mid \mathfrak{p}^\circ} H^2(K_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}^\circ, \mu_m^{\otimes 2})) & \xrightarrow{\partial} & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \\ \downarrow \cong & \downarrow \cong & \downarrow \cong \\ H^3(K^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) \rightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}^\circ} H^3(K_{\mathfrak{p}^\circ}^\circ, \mu_m^{\otimes 2}) & \rightarrow & H^1(\mathbf{F}, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}) \end{array}$$

(où, bien sûr, $K_2(K^{\circ\circ})/m$ veut dire $K_2(K^{\circ\circ})/mK_2(K^{\circ\circ})$ etc.) Remarquons que l'homomorphisme marqué ∂^M est induit par le composé de deux résidus de Milnor, comme dans le complexe **(M**) (noter, cependant, que tous les $f_{\mathfrak{p}^{\circ\circ}}$ sont égaux à 1), et ∂ est induit par le composé de deux résidus de Hochschild-Serre. Donc la commutativité du deuxième quadrant en haut est assurée par le lemme 2.4; la commutativité du premier est triviale. La ligne en bas est essentiellement la suite du th. 2, la seule différence étant que le composé des

deux résidus qui induit l’isomorphisme du th. 1 tombe dans $H^1(\kappa(v_p), \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$, il faut donc ajouter une corestriction pour l’extension finie de corps $\kappa(v_p) \mid F$ pour arriver à $H^1(F, \mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$. Mais l’isomorphisme de ce dernier groupe avec $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ n’est pas affecté par les corestrictions. Enfin les deux quadrants en bas commutent par des propriétés formelles de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Une application du lemme 5.1 (avec $A^{\circ\circ}$ à la place de B^h) montre que la première ligne est un complexe. D’autre part, le théorème de Merkouriev-Sousline et le fait que F soit de dimension cohomologique 1 entraînent la surjectivité du premier homomorphisme vertical en haut. Une chasse au diagramme montre alors que la ligne en bas est aussi un complexe, ce qu’il fallait démontrer.

REFERENCES

- [1] ARTIN, M. Algebraic approximation of structures over complete local rings. *Pub. Math. IHES* 36 (1969), 23–58.
- [2] —— *Grothendieck Topologies*. Harvard University, 1961.
- [3] BASS, H. and J. TATE. The Milnor Ring of a Global Field, in: H. Bass (ed.), *Algebraic K-theory II*. Springer LNM 342, 1973.
- [4] BLOCH, S. *Lectures on Algebraic Cycles*. Duke University, 1980.
- [5] FROSSARD, E. *Thèse*. Université de Paris-XI, Orsay, 1995.
- [6] KATO, K. A generalization of local class field theory by using K -groups II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 27 (1980), 603–683.
- [7] —— Milnor K -theory and the Chow group of zero-cycles, in: Bloch et al. (eds.), Applications of Algebraic K -Theory to Algebraic Geometry and Number Theory. *Contemp. Math.*, vol. 55, 241–263, AMS, Providence, 1986.
- [8] —— A Hasse principle for two-dimensional local fields. *J. reine angew. Math.* 366 (1986), 142–183.
- [9] KATO, K. and S. SAITO. Global class field theory of arithmetic schemes, in: S. Bloch et al. (eds.), Applications of Algebraic K -Theory to Algebraic Geometry and Number Theory. *Contemp. Math.*, vol. 55, 255–331, AMS, Providence, 1986.
- [10] LANG, S. *Algebra* (3rd ed.). Addison-Wesley, 1993.
- [11] MILNE, J. S. *Etale Cohomology*. Princeton University Press, 1980.
- [12] NAGATA, M. *Local Rings*. Wiley-Interscience, New York, 1952.
- [13] PERRIN-RIOU, B. Systèmes d’Euler et représentations p -adiques. Prépublication Orsay 96-04.
- [14] SAITO, S. Class field theory for curves over local fields. *J. Number Theory* 21 (1985), 44–80.