Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUISINGULARITÉ DANS LES PINCEAUX DE GERMES DE COURBES PLANES ET C^0-SUFFISANCE
Autor: Trang, LÊ Dung / WEBER, Claude
Kapitel: §3. Valeurs spéciales d'un pinceau de germes de courbes planes
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63285

L'unicité résulte d'arguments bien connus de la théorie des surfaces complexes. Une bonne référence est fournie par le livre de H. Laufer; voir [La] à partir de la page 87. Le fait que l'auteur s'intéresse à la résolution des singularités normales de surfaces plutôt qu'à la résolution des fonctions méromorphes n'est pas essentiel. □

REMARQUE. Le théorème d'unicité permet de donner un sens à la phrase suivante: «Deux résolutions de h ont les "mêmes" composantes dicritiques». En effet, on passe d'une résolution à une autre par une suite finie d'éclatements et de contractions sans toucher aux composantes dicritiques.

§3. VALEURS SPÉCIALES D'UN PINCEAU DE GERMES DE COURBES PLANES

Soit $\rho\colon \widehat{U} \to U$ la résolution minimale de la fonction méromorphe h. Posons $\hat{h} = h \circ \rho$.

DÉFINITION. L'ensemble (fini) des *valeurs spéciales* de h est formé:

i) des valeurs $\hat{h}|_{D_a}$ où D_a parcourt l'ensemble des composantes non dicritiques de $E = \rho^{-1}(0)$. Remarquer que la restriction de $\hat{h}$ à D_a est constante par définition.

ii) des valeurs critiques de $\hat{h}|_{D_b}$ où D_b parcourt l'ensemble des composantes dicritiques de E.

iii) des valeurs $\hat{h}(Q)$ où Q est un point d'intersection entre deux dicritiques.

Par définition une valeur non spéciale est *générique*. Si w est une valeur générique, le germe de courbe $h^{-1}(w)$ est, par définition, un membre générique du pinceau. Sinon, c'est un membre spécial.

AFFIRMATION 1. *N'importe quelle résolution de h est une résolution du germe de courbe $h^{-1}(w)$ pour w générique.*

En fait on a mieux:

AFFIRMATION 2. *N'importe quelle résolution de h est une résolution de n'importe quel germe $\bigcup_{i=1}^{m} h^{-1}(w^i)$ où les w^i sont m valeurs génériques deux à deux distinctes.*

Preuve des deux affirmations. Si w est une valeur générique, par définition $(\hat{h})^{-1}(w)$ ne rencontre aucune composante D_a non dicritique. Soit alors D_b une composante dicritique et soit $z \in D_b$ un point d'intersection de $(\hat{h})^{-1}(w)$ avec D_b. En vertu de la condition iii) portant sur les valeurs spéciales, le point z est un point lisse de D_b dans E. Comme la restriction $\hat{h}|_{D_b}$ n'a pas de point critique en z, la courbe $(\hat{h})^{-1}(w))$ est lisse et transverse à D_b en z.

Le même argument démontre aussi l'affirmation 2, car si w est distinct de w' les points de contact de $(\hat{h})^{-1}(w)$ avec D_b sont nécessairement distincts de ceux de $(\hat{h})^{-1}(w')$ avec D_b puisque $\hat{h}$ n'a plus de point d'indétermination.

L'affirmation suivante se démontre en suivant un raisonnement semblable.

AFFIRMATION 3. *La résolution minimale de h est la résolution minimale d'un germe $h^{-1}(w) \cup h^{-1}(w')$ où w et w' sont deux valeurs génériques distinctes.*

REMARQUE. Nous venons de voir que la résolution minimale de h est (entre autres choses) une résolution de n'importe quel germe générique. En revanche, elle n'est pas nécessairement une résolution d'un germe spécial. Maintenant, supposons que h_1 et h_2 sont des germes génériques du pinceau. Alors la résolution construite dans la preuve de la proposition 2.1 est la résolution minimale de h si l'on démarre avec la résolution minimale de h_1h_2. Si le germe h_1 (et/ou le germe h_2) est spécial, la résolution de la proposition 2.1 n'est pas nécessairement minimale. A posteriori, on constate qu'elle l'est si et seulement si h_1 (et/ou h_2) sont résolus par la résolution minimale de h).

Soit maintenant $\rho\colon \widehat{U} \to U$ la résolution minimale de h construite au paragraphe 2.

PROPOSITION 3.1. *Les composantes dicritiques de* $E = \rho^{-1}(0)$ *sont les composantes* D *telles que:*

1. $v(D) = 0$.

2. *D rencontre au moins une composante D' de support de Z et une composante D'' du support de P.*

Preuve. Les conditions sont nécessaires. En effet, si D est dicritique, D ne peut appartenir ni au support des zéros ni au support des pôles, ce qui implique que $v(D) = 0$. Comme la restriction de $\hat{h}$ à une composante dicritique D est nécessairement surjective (puisque non constante et holomorphe) la valeur 0 et la valeur ∞ sont prises par $\hat{h}|_D$.

Réciproquement, nous savons déjà que $v(D) = 0$ implique soit que D est dicritique, soit que la restriction $\hat{h}|_D$ est constante et de valeur distincte de 0 ou de ∞. La condition 2 rend impossible la deuxième branche de l'alternative. $\square$

REMARQUES.

1) La preuve indique que la composante D est dicritique si et seulement si $v(D) = 0$ et D rencontre le support de Z ou le support de P.

2) La proposition précédente a un certain intérêt pratique. Il est facile en effet de construire des fonctions méromorphes où toutes les composantes du lieu exceptionnel de la résolution minimale ont valuation v nulle.

La remarque suivante est une parenthèse dans cet article. Elle résulte immédiatement du paragraphe 2 et de la proposition précédente.

REMARQUE. Soient h_1 et $h_2 \colon U \to \mathbf{C}$ comme au §2. Tautologiquement, h_1 et h_2 déterminent le pinceau qu'elles engendrent ! Mais ce que nous venons de faire démontre ceci. La topologie locale de $h_1 h_2 = 0$ (où l'on colore les composantes de $h_1 = 0$ d'une certaine couleur et celles de $h_2 = 0$ d'une autre couleur; nous parlerons dans ces circonstances de *topologie colorée*) détermine la topologie colorée de $h_1 h_2 h_{\text{gen}} = 0$. Par h_{gen} on désigne un membre générique du pinceau (équipé d'une troisième couleur). De plus le procédé que nous avons donné est effectif. Entre autres choses, la topologie de h_{gen} peut être déterminée effectivement à partir de la topologie colorée de $h_1 h_2 = 0$. De même, la topologie colorée de $h_1 h_2 h^1_{\text{gen}} \ldots h^m_{\text{gen}} = 0$ est déterminée, où les h^i_{gen} sont m membres génériques, deux à deux distincts, du pinceau. Finalement, observons que tout ceci fonctionne si les générateurs h_i $(i = 1, 2)$ du pinceau ne sont pas réduits.

Nous conseillons au lecteur de faire des tests sur quelques exemples. Voir aussi le paragraphe 6 (surtout la fin).