Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)
Autor: Pan, Ivan
Kapitel: 5. Comparaison avec les résultats classiques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63281

(b) *pour* $* = J$,

$$0 \longrightarrow A(-5) \longrightarrow A^3(-4) \oplus A(-5) \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2\,.$$

(c) *pour* $* = R$ *et* T *générique,*

$$0 \longrightarrow A(-6) \longrightarrow (A(-5) \oplus A(-4))^2 \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0\,;$$

en particulier

$$p_{B(T)} = 5t + 1\,,$$

et donc $T \notin \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$.

5. Comparaison avec les résultats classiques

Soit $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona; on note Λ_T le système linéaire correspondant: un élément générique de Λ_T est donc le transformé strict d'un plan générique. Si S, $S' \in \Lambda_T$ sont génériques, alors l'intersection schématique $S \cap S'$ est la réunion de la transformée stricte γ d'une droite générique et d'un 1-cycle fixe ω dont le support est contenu dans l'ensemble des points base de T; en particulier $\deg(\omega) = \deg(T)^2 - \deg(T^{-1})$. Dans le cas de bidegré (3,3) on a $\deg(\omega) = 6$, et on écrit $\omega_6 = \omega$.

Si O est un point singulier de S, pour tout $S \in \Lambda_T$, on dit:

(i) O est un *point double ordinaire* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et sans génératrice commune;

(ii) O est un *point double de contact* pour Λ_T si les cônes tangents en O des éléments génériques de Λ_T sont non dégénérés et coïncident.

Dans [7, chap. XIV, page 295 et table VI], Hilda Hudson, qui ne considère apparemment que des situations génériques, affirme qu'il y a quatre types de transformations de bidegré (3,3). Plus précisément, elle distingue quatre cas suivant la nature du lieu des points singuliers $\Sigma(S)$ d'un élément générique $S \in \Lambda_T$ et celle de ω_6 (on indique entre parenthèses le type correspondant à notre définition 1.1):

(a) S est lisse (**D**);

(b) $\Sigma(S)$ est discret et

(b1) contient un point double O ordinaire pour Λ_T qui est un point double pour ω_6 (**J**), ou bien

(b2) contient un point double O de contact pour Λ_T qui est un point quadruple pour ω_6 (**J**);

(c) $\Sigma(S)$ est une droite (**R**).

Dans le cas (a), T est déterminantielle d'après le corollaire, et dans le cas (c) elle est évidemment réglée. Les deux cas (b) fournissent des transformations de de Jonquières: en effet, les hypothèses impliquent que O est un point multiple de $S \cap S'$ de multiplicité 4 pour (b1) ou 6 pour (b2), et donc que O est un point double de γ.

A partir du lemme 2.3 on construit facilement des transformations vérifiant les conditions (b): pour (b1) prendre q et g génériques, et pour (b2) choisir $q \in \mathcal{M}^2$ et g générique.

Dans [3] L. Cremona ne prétend pas à une classification mais se propose seulement de démontrer la simplicité et la fécondité de sa méthode de construction de transformations birationnelles (pour un exposé de cette méthode voir aussi [16, chap. VIII]); il étudie en détail cinq cas:

(1) S est lisse (**D**);

(2) S est réglée (**R**);

(3) S contient deux points doubles P_1, P_2 ordinaires pour Λ_T, et ω_6 est la réunion de la droite P_1P_2 et d'une quintique rationnelle avec deux points doubles en P_1 et P_2 (**D**) ou avec un point triple en P_1 et passant simplement par P_2 (**J**);

(4) S contient trois points doubles P_1, P_2, P_3 ordinaires pour Λ_T et ω_6 est la réunion des trois droites P_iP_j et d'une cubique gauche passant par les P_i (**D**);

(5) S contient un point double O de contact uniplanaire pour Λ_T (*i.e.* le cône tangent en O d'un élément générique de Λ_T est dégénéré en un plan double) et ω_6 a un point quadruple en O (**J**).