Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 43 (1997)

**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)

Autor: Pan, Ivan

**Kapitel:** 5. Comparaison avec les résultats classiques

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-63281

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

## **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

## Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF: 28.11.2025** 

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(b) pour \* = J,

$$0 \longrightarrow A(-5) \longrightarrow A^{3}(-4) \oplus A(-5) \longrightarrow A^{4}(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)}(t) = 6t - 2.$$

(c) pour \* = R et T générique,

$$0 \longrightarrow A(-6) \longrightarrow (A(-5) \oplus A(-4))^2 \longrightarrow A^4(-3) \longrightarrow \mathcal{I}(T) \longrightarrow 0;$$

en particulier

$$p_{B(T)}=5t+1\,,$$

et donc  $T \notin \mathbf{T}_{3,3}^{\mathbf{D}} \cup \mathbf{T}_{3,3}^{\mathbf{J}}$ .

## 5. COMPARAISON AVEC LES RÉSULTATS CLASSIQUES

Soit  $T: \mathbf{P}^3 - - \to \mathbf{P}^3$  une transformation de Cremona; on note  $\Lambda_T$  le système linéaire correspondant: un élément générique de  $\Lambda_T$  est donc le transformé strict d'un plan générique. Si  $S, S' \in \Lambda_T$  sont génériques, alors l'intersection schématique  $S \cap S'$  est la réunion de la transformée stricte  $\gamma$  d'une droite générique et d'un 1-cycle fixe  $\omega$  dont le support est contenu dans l'ensemble des points base de T; en particulier  $\deg(\omega) = \deg(T)^2 - \deg(T^{-1})$ . Dans le cas de bidegré (3,3) on a  $\deg(\omega) = 6$ , et on écrit  $\omega_6 = \omega$ .

Si O est un point singulier de S, pour tout  $S \in \Lambda_T$ , on dit:

- (i) O est un *point double ordinaire* pour  $\Lambda_T$  si les cônes tangents en O des éléments génériques de  $\Lambda_T$  sont non dégénérés et sans génératrice commune;
- (ii) O est un point double de contact pour  $\Lambda_T$  si les cônes tangents en O des éléments génériques de  $\Lambda_T$  sont non dégénérés et coïncident.

Dans [7, chap. XIV, page 295 et table VI], Hilda Hudson, qui ne considère apparemment que des situations génériques, affirme qu'il y a quatre types de transformations de bidegré (3,3). Plus précisemment, elle distingue quatre cas suivant la nature du lieu des points singuliers  $\Sigma(S)$  d'un élément générique  $S \in \Lambda_T$  et celle de  $\omega_6$  (on indique entre parenthèses le type correspondant à notre définition 1.1):

- (a) S est lisse (**D**);
- (b)  $\Sigma(S)$  est discret et
  - (b1) contient un point double O ordinaire pour  $\Lambda_T$  qui est un point double pour  $\omega_6$  (**J**), ou bien
  - (b2) contient un point double O de contact pour  $\Lambda_T$  qui est un point quadruple pour  $\omega_6$  (**J**);
- (c)  $\Sigma(S)$  est une droite (**R**).

Dans le cas (a), T est déterminantielle d'après le corollaire, et dans le cas (c) elle est évidemment réglée. Les deux cas (b) fournissent des transformations de de Jonquières: en effet, les hypothèses impliquent que O est un point multiple de  $S \cap S'$  de multiplicité 4 pour (b1) ou 6 pour (b2), et donc que O est un point double de  $\gamma$ .

A partir du lemme 2.3 on construit facilement des transformations vérifiant les conditions (b): pour (b1) prendre q et g génériques, et pour (b2) choisir  $q \in \mathcal{M}^2$  et g générique.

Dans [3] L. Cremona ne prétend pas à une classification mais se propose seulement de démontrer la simplicité et la fécondité de sa méthode de construction de transformations birationnelles (pour un exposé de cette méthode voir aussi [16, chap. VIII]); il étudie en détail cinq cas:

- (1) S est lisse (**D**);
- (2) S est réglée ( $\mathbf{R}$ );
- (3) S contient deux points doubles  $P_1, P_2$  ordinaires pour  $\Lambda_T$ , et  $\omega_6$  est la réunion de la droite  $P_1P_2$  et d'une quintique rationnelle avec deux points doubles en  $P_1$  et  $P_2$  (**D**) ou avec un point triple en  $P_1$  et passant simplement par  $P_2$  (**J**);
- (4) S contient trois points doubles  $P_1, P_2, P_3$  ordinaires pour  $\Lambda_T$  et  $\omega_6$  est la réunion des trois droites  $P_i P_j$  et d'une cubique gauche passant par les  $P_i$  (**D**);
- (5) S contient un point double O de contact uniplanaire pour  $\Lambda_T$  (*i.e.* le cône tangent en O d'un élément générique de  $\Lambda_T$  est dégénéré en un plan double) et  $\omega_6$  a un point quadruple en O ( $\mathbf{J}$ ).