Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)

Autor: Pan, Ivan

Kapitel: 2. Exemples

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63281

avec mineurs 3×3 (considérés avec leur signe) notés $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, telle que

$$T = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4]\,;$$

2. T est dite de *de Jonquières* si $\widetilde{T^{-1}(L)}$ est une courbe cubique plane;
3. T est dite *réglée* si $\widetilde{T^{-1}(H)}$ est une surface cubique réglée.

On note $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3}$, $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$ les ensembles des transformations de bidegré (3,3) qui sont déterminantielles, de de Jonquières et réglées respectivement.

Voici le résultat principal de ce travail, qui est démontré plus loin au §3.

THÉORÈME 1.2. $\mathbf{T}_{3,3} = \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \cup \mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3}$.

2. EXEMPLES

EXEMPLE 2.1. Comme on l'a vu, l'application rationnelle

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz]$$

est de Cremona de bidegré $(3,3)$. On constate qu'elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \\ -w & -w & -w \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2.2. L'application rationnelle

$$T = [xz^2, yz^2, zw^2, w^3]$$

est une transformation de bidegré (3,3) avec inverse

$$T^{-1} = [xw^2, yw^2, z^3, z^2w]\,.$$

C'est une transformation réglée: en effet, le transformé strict d'un plan générique a l'équation

$$z^2(ax+by) + w^2(cz+dw) = 0\,,$$

qui est évidemment l'équation d'une surface réglée.

LEMME 2.3. *Notons $\mathcal{M}$ l'idéal engendré par x, y, z. Soient q, g des polynômes homogènes des degrés 2 et 3 respectivement tels que $q \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{M}^2$ et $qg \notin \mathcal{M}^5$. Supposons g irréductible. Alors l'application rationnelle $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ définie par*

$$T = [xq, yq, zq, g]$$

est une transformation de de Jonquières.

Preuve. En effet, prenons un plan générique d'équation

$$ax + by + cz + dw = 0\,;$$

son transformé strict est donc la surface cubique $S_{a,b,c,d}$ d'équation

$$q(ax + by + cz) + dg = 0\,,$$

qui est aussi irréductible. D'une part les conditions sur q et g impliquent que le point $P_0 = [0,0,0,1]$ est un point double de $S_{a,b,c,d}$; d'autre part la restriction de T à $S_{a,b,c,d}$ est (la restriction d') une projection de centre P_0 sur un plan : si $s\colon \mathbf{P}^3 \to \mathbf{P}^3$ est l'automorphisme associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

la restriction de $s \circ T$ à $S_{a,b,c,d}$ est une projection de centre P_0 sur le plan $w = 0$. On en déduit que T est birationnelle du type de de Jonquières puisque la transformée stricte d'une droite générique est une section plane par P_0 d'une surface cubique avec un point double en P_0. $\square$

On montre dans [13, cor. 3.3.7] que $\mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} = \varnothing$. Cependant $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{D}}_{3,3} \neq \varnothing$ et $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}_{3,3} \cap \mathbf{T}^{\mathbf{J}}_{3,3} \neq \varnothing$ comme il ressort des exemples qui suivent.

EXEMPLE 2.4. Considérons les applications rationnelles

$$T = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2] \text{ et } T' = [x^3, x^2y, x^2z, x^2z - y^2w]\,.$$

D'une part T est involutive, donc de Cremona de bidegré (3,3); elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} x & w & 0 \\ -y & 0 & z \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}$$

et évidemment réglée. D'autre part, T' est une transformation de de Jonquières par le lemme 2.3 et aussi réglée.

EXEMPLE 2.5. Dans [13, chap. 4] on montre que la partie de dimension 1 de l'ensemble des points base d'une transformation réglée est de l'une des formes : une droite, deux droites concourantes, trois droites concourantes non coplanaires et trois droites non coplanaires dont l'une s'appuie sur les deux autres. Voici un exemple de chaque cas :

$$\begin{aligned} T_1 &= [xy^2, y^3, zx^2, wx^2], \\ T_2 &= [x^3, x^2y, zxy, wy^2], \\ T_3 &= [x^2y, xy^2, z(y^2 - x^2), xyw], \\ T_4 &= [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2]\,; \end{aligned}$$

avec pour inverses respectives :

$$\begin{aligned} T_1^{-1} &= [x^3, yx^2, zy^2, wy^2], \\ T_2^{-1} &= [xy^2, y^3, zxy, wx^2], \\ T_3^{-1} &= [x(y^2 - x^2), y(y^2 - x^2), zyx, w(y^2 - x^2)], \\ T_4^{-1} &= T_4\,. \end{aligned}$$

3. PREUVE DU THÉORÈME

Deux lemmes sont nécessaires pour démontrer le résultat principal.

Rappelons pour commencer que sur une variété normale W, on dispose de la notion de système linéaire sans composante fixe associé à un diviseur de Weil : se donner un tel système linéaire Λ de dimension l revient à se donner une application rationnelle $\phi \colon W \dashrightarrow \mathbf{P}^l$ telle que le transformé strict d'un hyperplan générique de $\mathbf{P}^l$ est un élément générique de Λ ; de plus, l'ensemble des points base de Λ coïncide avec l'ensemble des points où ϕ n'est pas définie (voir [10]).