

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)
Autor: Pan, Ivan
Kapitel: 2. Exemples
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63281>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

avec mineurs 3×3 (considérés avec leur signe) notés $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, telle que

$$T = [\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4];$$

2. T est dite *de Jonquières* si $\widetilde{T^{-1}(L)}$ est une courbe cubique plane;
3. T est dite *réglée* si $\widetilde{T^{-1}(H)}$ est une surface cubique réglée.

On note $\mathbf{T}_{3,3}^D$, $\mathbf{T}_{3,3}^J$, $\mathbf{T}_{3,3}^R$ les ensembles des transformations de bidegré (3,3) qui sont déterminantielles, de de Jonquières et réglées respectivement.

Voici le résultat principal de ce travail, qui est démontré plus loin au §3.

THÉORÈME 1.2. $\mathbf{T}_{3,3} = \mathbf{T}_{3,3}^D \cup \mathbf{T}_{3,3}^J \cup \mathbf{T}_{3,3}^R$.

2. EXEMPLES

EXEMPLE 2.1. Comme on l'a vu, l'application rationnelle

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz]$$

est de Cremona de bidegré (3,3). On constate qu'elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & y & 0 \\ z & 0 & 0 \\ -w & -w & -w \end{pmatrix}.$$

EXEMPLE 2.2. L'application rationnelle

$$T = [xz^2, yz^2, zw^2, w^3]$$

est une transformation de bidegré (3,3) avec inverse

$$T^{-1} = [xw^2, yw^2, z^3, z^2w].$$

C'est une transformation réglée: en effet, le transformé strict d'un plan générique a l'équation

$$z^2(ax + by) + w^2(cz + dw) = 0,$$

qui est évidemment l'équation d'une surface réglée.

LEMME 2.3. Notons \mathcal{M} l'idéal engendré par x, y, z . Soient q, g des polynômes homogènes des degrés 2 et 3 respectivement tels que $q \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{M}^2$ et $qg \notin \mathcal{M}^5$. Supposons g irréductible. Alors l'application rationnelle $T: \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ définie par

$$T = [xq, yq, zq, g]$$

est une transformation de de Jonquières.

Preuve. En effet, prenons un plan générique d'équation

$$ax + by + cz + dw = 0;$$

son transformé strict est donc la surface cubique $S_{a,b,c,d}$ d'équation

$$q(ax + by + cz) + dg = 0,$$

qui est aussi irréductible. D'une part les conditions sur q et g impliquent que le point $P_0 = [0, 0, 0, 1]$ est un point double de $S_{a,b,c,d}$; d'autre part la restriction de T à $S_{a,b,c,d}$ est (la restriction d') une projection de centre P_0 sur un plan: si $s: \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^3$ est l'automorphisme associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

la restriction de $s \circ T$ à $S_{a,b,c,d}$ est une projection de centre P_0 sur le plan $w = 0$. On en déduit que T est birationnelle du type de de Jonquières puisque la transformée stricte d'une droite générique est une section plane par P_0 d'une surface cubique avec un point double en P_0 . \square

On montre dans [13, cor. 3.3.7] que $\mathbf{T}_{3,3}^D \cap \mathbf{T}_{3,3}^J = \emptyset$. Cependant $\mathbf{T}_{3,3}^R \cap \mathbf{T}_{3,3}^D \neq \emptyset$ et $\mathbf{T}_{3,3}^R \cap \mathbf{T}_{3,3}^J \neq \emptyset$ comme il ressort des exemples qui suivent.

EXEMPLE 2.4. Considérons les applications rationnelles

$$T = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2] \text{ et } T' = [x^3, x^2y, x^2z, x^2z - y^2w].$$

D'une part T est involutive, donc de Cremona de bidegré (3,3); elle est déterminantielle de matrice

$$\begin{pmatrix} x & w & 0 \\ -y & 0 & z \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}$$

et évidemment réglée. D'autre part, T' est une transformation de de Jonquières par le lemme 2.3 et aussi réglée.

EXEMPLE 2.5. Dans [13, chap. 4] on montre que la partie de dimension 1 de l'ensemble des points base d'une transformation réglée est de l'une des formes : une droite, deux droites concourantes, trois droites concourantes non coplanaires et trois droites non coplanaires dont l'une s'appuie sur les deux autres. Voici un exemple de chaque cas :

$$T_1 = [xy^2, y^3, zx^2, wx^2],$$

$$T_2 = [x^3, x^2y, zxy, wy^2],$$

$$T_3 = [x^2y, xy^2, z(y^2 - x^2), xyw],$$

$$T_4 = [xy^2, yx^2, zx^2, wy^2];$$

avec pour inverses respectives :

$$T_1^{-1} = [x^3, yx^2, zy^2, wy^2],$$

$$T_2^{-1} = [xy^2, y^3, zxy, wx^2],$$

$$T_3^{-1} = [x(y^2 - x^2), y(y^2 - x^2), zyx, w(y^2 - x^2)],$$

$$T_4^{-1} = T_4.$$

3. PREUVE DU THÉORÈME

Deux lemmes sont nécessaires pour démontrer le résultat principal.

Rappelons pour commencer que sur une variété normale W , on dispose de la notion de système linéaire sans composante fixe associé à un diviseur de Weil : se donner un tel système linéaire Λ de dimension l revient à se donner une application rationnelle $\phi : W \dashrightarrow \mathbf{P}^l$ telle que le transformé strict d'un hyperplan générique de \mathbf{P}^l est un élément générique de Λ ; de plus, l'ensemble des points base de Λ coïncide avec l'ensemble des points où ϕ n'est pas définie (voir [10]).