Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 43 (1997)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)

Autor: Pan, Ivan

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-63281

L'Enseignement Mathématique, t. 43 (1997), p. 285–297

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CREMONA DE BIDEGRÉ (3,3)

par Ivan PAN [1])

RÉSUMÉ. Dans ce travail on étudie les transformations birationnelles de $\mathbf{P}^3$ de degré 3 dont l'inverse est aussi de degré 3 au moyen de la théorie de la liaison des courbes algébriques. On distingue trois types de transformations selon la nature du transformé strict d'un plan ou d'une droite générique.

INTRODUCTION

On désigne par k un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et par $\mathbf{P}^3$ l'espace projectif sur k ; on notera $[x, y, z, w]$ le point de $\mathbf{P}^3$ de coordonnées homogènes x, y, z, w.

On rappelle qu'une application rationnelle

$$T \colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3 ,$$

peut être représentée comme

$$T(P) = [f_0(P), \ldots, f_3(P)], \quad P \in \mathbf{P}^3 \setminus \{f_0 = \cdots = f_3 = 0\} ,$$

où $f_0, \ldots, f_3$ sont des polynômes homogènes de même degré $\deg(T)$ et sans diviseurs communs (voir [5, §7.2]); l'entier $\deg(T)$ est appelé *degré* de l'application. On dit que T est une *transformation de Cremona* si elle possède un inverse rationnel (*i.e.* si elle est birationnelle); dans ce cas $(\deg(T), \deg(T^{-1}))$ est appelé *bidegré* de T.

Par la suite on ne s'intéresse qu'au cas des transformations de Cremona de bidegré (3,3), dont l'un des exemples les plus célèbres est la transformation

$$T = [yzw, xzw, xyw, xyz] .$$

---

[1]) boursier du CNPq — Brésil.

Observer que dans l'ouvert $xyzw \neq 0$, on a

$$T = \left[\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{w}\right],$$

d'où $T = T^{-1}$.

Ces transformations ont été l'objet d'études détaillées, voir [1], [3], [7], [8], [9], [16] et plus récemment [12]. Ici on utilise la théorie de la liaison des courbes algébriques ([11], [14]) pour classer ces transformations en trois types; on donne quelques exemples et à la fin on fait le lien avec les travaux classiques.

1. Le résultat principal

Soit $T\colon \mathbf{P}^3 \dashrightarrow \mathbf{P}^3$ une transformation de Cremona. On choisit des ouverts non vides U et V de $\mathbf{P}^3$ tels que la restriction de T à U induise un isomorphisme

$$\tau : U \to V.$$

Soit $Z \subset \mathbf{P}^3$ une sous-variété linéaire. Si Z est *générique*, alors $Z \cap V \neq \varnothing$ et $\overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$ est une sous-variété qui ne dépend pas du choix de U et V : on l'appelle *transformée stricte* de Z par T et on la note $\widetilde{T^{-1}(Z)} := \overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$.

Par définition, le degré $\deg(T)$ de T est le degré du transformé strict d'un plan générique. Si L est une droite générique, on peut supposer que L ne rencontre pas le lieu d'indétermination de T^{-1} et dans ce cas, la restriction de T^{-1} à L est décrite par un système linéaire sans points base de degré égal au degré de T^{-1} ; il s'ensuit que $\deg(T^{-1})$ est égal au degré de $\widetilde{T^{-1}(L)}$ (voir aussi [7, chap.IX, § 3]).

On note $\mathbf{T}_{3,3}$ l'ensemble des transformations de Cremona de bidegré (3,3). La transformée stricte d'une droite générique par une telle transformation est donc une cubique rationnelle: c'est ou bien une cubique gauche, ou bien une cubique plane singulière.

Définitions 1.1. Soit $T \in \mathbf{T}_{3,3}$ et $L, H \subset \mathbf{P}^3$ une droite et un plan génériques. Alors

1. T est dite *déterminantielle* s'il existe une matrice à coefficients dans les formes linéaires sur k^4

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix},$$