

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 43 (1997)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: THEOREM OF INGHAM IMPLYING THAT DIRICHLET'S L-FUNCTIONS HAVE NO ZEROS WITH REAL PART ONE
Autor: Bateman, Paul T.

Bibliographie
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63280>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\begin{aligned}
 a(p^2) &= 3 + 2\epsilon(p) + 2\bar{\epsilon}(p) + \epsilon(p)^2 + \epsilon(p)\bar{\epsilon}(p) + \bar{\epsilon}(p)^2 \\
 &= 2 - \epsilon(p)\bar{\epsilon}(p) + \{1 + \epsilon(p) + \bar{\epsilon}(p)\}^2 \\
 &\geq 2 - |\epsilon(p)|^2 \geq 1.
 \end{aligned}$$

Thus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{1/2}} \geq \sum_p \frac{a(p^2)}{p} \geq \sum_p \frac{1}{p}.$$

In view of the divergence of $\sum p^{-1}$, it follows that $\sum a(n)n^{-1/2}$ diverges.

On the other hand, applying Landau's lemma with $c_n = a(n)$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, we find that $\sum a(n)n^{-1/2}$ converges. This contradiction shows that the assumption $g(1) = 0$ is untenable and so the proof is complete.

REFERENCES

- [1] INGHAM, A.E. Note on Riemann's ζ -function and Dirichlet's L -functions. *J. London Math. Soc.* 5 (1930), 107–112.
- [2] LANDAU, Edmund. Über einen Satz von Tschebyschef. *Math. Ann.* 61 (1905), 527–550, or *Collected Works vol. 2* (Thales Verlag, 1986), 206–229.
- [3] ——— Über das Nichtverschwinden einer Dirichletschen Reihe. *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. Wiss. Berlin* (1906), 314–320, or *Collected Works vol. 2* (Thales Verlag, 1986), 230–236.
- [4] NARASIMHAN, Raghavan. Une remarque sur $\zeta(1 + it)$. *L'Enseignement Math.* (2) 14 (1969), 189–191.
- [5] NEWMAN, D.J. A “natural” proof of the non-vanishing of L -series. *Contemp. Math.* 143 (1993), 495–498.
- [6] SHAPIRO, George. On the non-vanishing at $s = 1$ of certain Dirichlet series. *Amer. J. Math.* 71 (1949), 621–626.

(Reçu le 16 avril 1997)

Paul T. Bateman

Department of Mathematics
 University of Illinois
 Urbana, IL 61801
 U. S. A.
e-mail: bateman@math.uiuc.edu