

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 42 (1996)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS
CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan
Autor: Mathéus, Frédéric
Kapitel: 1. Sur l'inégalité de Harnack
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-87874>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

on amène le bord B' au potentiel 0. Toujours d'après la loi de monotonie de Rayleigh, on a alors :

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \frac{1}{12} \text{Log } d(v) ,$$

la dernière inégalité résultant du lemme 4. \square

Fin de la preuve du lemme 3. Soit \tilde{K} le compact de l'énoncé de la proposition. Rappelons qu'il est contenu dans l'intérieur de K . Notons δ la distance hyperbolique de \tilde{K} à $\mathbf{D}^2 \setminus K$. Pour tout sommet $v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ on a $d(v) \geq \frac{\delta}{\varepsilon}$, donc $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq -\frac{1}{12} \text{Log } \delta \varepsilon$, ce qui est bien le résultat cherché. \square

VII. COMMENTAIRES

1. SUR L'INÉGALITÉ DE HARNACK

L'estimation obtenue ici en $\frac{1}{\sqrt{-\text{Log } \varepsilon}}$ n'est ni optimale, ni propre aux réseaux récurrents, comme la preuve peut le laisser penser. Les résultats les plus significatifs ont été obtenu par Gregory Lawler (voir [La1] et [La2]). Soit u une fonction de \mathbf{Z}^d dans \mathbf{R} . On pose

$$\Delta_0 u(x) = u(x) - \frac{1}{2d} \sum_{s \sim x} u(s)$$

(la somme est étendue à tous les voisins de x dans le réseau \mathbf{Z}^d).

THÉORÈME 1. *Il existe une constante C telle que si u est une fonction harmonique (pour Δ_0) positive sur la boule combinatoire de \mathbf{Z}^d de centre 0 de rayon N , alors*

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leq \frac{C}{N}.$$

Dans le cas de la dimension 3, ce théorème avait déjà été démontré par R.J. Duffin ([Du]) dans les années cinquante. Dans [L1], G. Lawler étudie également les opérateurs à coefficients variables :

THÉORÈME 2. *Soit A, B deux réels vérifiant $0 < A < B$. Il existe alors deux réels C et $\alpha, \alpha \in]0, 1[$, qui ne dépendent que de A, B et d , et possédant la propriété suivante :*

Soit L un opérateur de la forme $Lu(s) = c_s u(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} u(s')$ opérant sur les fonctions numériques définies sur \mathbb{Z}^d et dont les coefficients vérifient: $A \leq c_s \leq B$, $A \leq -c_{ss'} \leq B$, $c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0$ et $c_{ss'} = c_{ss''}$ où s'' est le symétrique de s' par rapport à s . Alors si u est une fonction définie sur la boule combinatoire de \mathbb{Z}^d de centre 0 de rayon N , telle que

$$Lu = 0 \quad \text{et} \quad u \geq 0,$$

on a

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leq \frac{C}{N^\alpha}.$$

On notera que la condition de symétrie sur les coefficients n'est pas celle d'un laplacien discret (à savoir $c_{ss'} = c_{s's}$).

2. SUR LE THÉORÈME DE RODIN-SULLIVAN

Nous citons ici deux généralisations du théorème de Rodin-Sullivan. Soit \mathcal{C}^1 le 1-squelette d'une triangulation \mathcal{C} d'un disque topologique et \mathcal{P} un empilement de cercles de combinatoire \mathcal{C}^1 plongé isométriquement dans \mathcal{U} . Notons $\tilde{\mathcal{P}}$ l'empilement d'Andreev associé à \mathcal{P} normalisé comme au début de II. On note $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ (resp. $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{P}}}$) la réalisation géométrique de \mathcal{C} définie par \mathcal{P} (resp. $\tilde{\mathcal{P}}$), et $f_{\mathcal{P}}: \mathcal{C}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{P}}}$ l'application affine par morceaux qui envoie de manière affine chaque triangle de $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$ sur son correspondant dans $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{P}}}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et supposons que la distance de Hausdorff $d_{\mathcal{H}}(\partial \mathcal{C}_{\mathcal{P}}, \partial \mathcal{U})$ soit $\leq \varepsilon$ ainsi que tous les rayons des cercles de \mathcal{P} . On a le

THÉORÈME 1. *S'il existe une constante C telle que pour tous cercles c, c' de \mathcal{P} ,*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\text{rayon}(c)}{\text{rayon}(c')} \leq C.$$

Alors $f_{\mathcal{P}}$ converge uniformément sur les compacts de \mathcal{U} vers l'uniformisation de Riemann f de \mathcal{U} , lorsque ε tend vers 0.

Ce théorème a été obtenu en premier par Kenneth Stephenson en 1991 (voir [St1] et [St2]). Sa preuve repose sur le lemme de Schwarz-Pick discret de [B-St2] et le théorème de récurrence de Pólya.