

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 42 (1996)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS  
CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan  
**Autor:** Mathéus, Frédéric  
**Kapitel:** VII. Commentaires  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87874>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

on amène le bord  $B'$  au potentiel 0. Toujours d'après la loi de monotonie de Rayleigh, on a alors :

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq \frac{1}{12} \text{Log } d(v) ,$$

la dernière inégalité résultant du lemme 4.  $\square$

*Fin de la preuve du lemme 3.* Soit  $\tilde{K}$  le compact de l'énoncé de la proposition. Rappelons qu'il est contenu dans l'intérieur de  $K$ . Notons  $\delta$  la distance hyperbolique de  $\tilde{K}$  à  $\mathbf{D}^2 \setminus K$ . Pour tout sommet  $v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$  on a  $d(v) \geq \frac{\delta}{\varepsilon}$ , donc  $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v,B} \geq -\frac{1}{12} \text{Log } \delta \varepsilon$ , ce qui est bien le résultat cherché.  $\square$

## VII. COMMENTAIRES

### 1. SUR L'INÉGALITÉ DE HARNACK

L'estimation obtenue ici en  $\frac{1}{\sqrt{-\text{Log } \varepsilon}}$  n'est ni optimale, ni propre aux réseaux récurrents, comme la preuve peut le laisser penser. Les résultats les plus significatifs ont été obtenu par Gregory Lawler (voir [La1] et [La2]). Soit  $u$  une fonction de  $\mathbf{Z}^d$  dans  $\mathbf{R}$ . On pose

$$\Delta_0 u(x) = u(x) - \frac{1}{2d} \sum_{s \sim x} u(s)$$

(la somme est étendue à tous les voisins de  $x$  dans le réseau  $\mathbf{Z}^d$ ).

**THÉORÈME 1.** *Il existe une constante  $C$  telle que si  $u$  est une fonction harmonique (pour  $\Delta_0$ ) positive sur la boule combinatoire de  $\mathbf{Z}^d$  de centre 0 de rayon  $N$ , alors*

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leq \frac{C}{N}.$$

Dans le cas de la dimension 3, ce théorème avait déjà été démontré par R.J. Duffin ([Du]) dans les années cinquante. Dans [L1], G. Lawler étudie également les opérateurs à coefficients variables :

**THÉORÈME 2.** *Soit  $A, B$  deux réels vérifiant  $0 < A < B$ . Il existe alors deux réels  $C$  et  $\alpha, \alpha \in ]0, 1[$ , qui ne dépendent que de  $A, B$  et  $d$ , et possédant la propriété suivante :*

Soit  $L$  un opérateur de la forme  $Lu(s) = c_s u(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} u(s')$  opérant sur les fonctions numériques définies sur  $\mathbb{Z}^d$  et dont les coefficients vérifient:  $A \leq c_s \leq B$ ,  $A \leq -c_{ss'} \leq B$ ,  $c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0$  et  $c_{ss'} = c_{ss''}$  où  $s''$  est le symétrique de  $s'$  par rapport à  $s$ . Alors si  $u$  est une fonction définie sur la boule combinatoire de  $\mathbb{Z}^d$  de centre 0 de rayon  $N$ , telle que

$$Lu = 0 \quad \text{et} \quad u \geq 0,$$

on a

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leq \frac{C}{N^\alpha}.$$

On notera que la condition de symétrie sur les coefficients n'est pas celle d'un laplacien discret (à savoir  $c_{ss'} = c_{s's}$ ).

## 2. SUR LE THÉORÈME DE RODIN-SULLIVAN

Nous citons ici deux généralisations du théorème de Rodin-Sullivan. Soit  $\mathcal{C}^1$  le 1-squelette d'une triangulation  $\mathcal{C}$  d'un disque topologique et  $\mathcal{P}$  un empilement de cercles de combinatoire  $\mathcal{C}^1$  plongé isométriquement dans  $\mathcal{U}$ . Notons  $\tilde{\mathcal{P}}$  l'empilement d'Andreev associé à  $\mathcal{P}$  normalisé comme au début de II. On note  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  (resp.  $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{P}}}$ ) la réalisation géométrique de  $\mathcal{C}$  définie par  $\mathcal{P}$  (resp.  $\tilde{\mathcal{P}}$ ), et  $f_{\mathcal{P}}: \mathcal{C}_{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{P}}}$  l'application affine par morceaux qui envoie de manière affine chaque triangle de  $\mathcal{C}_{\mathcal{P}}$  sur son correspondant dans  $\mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{P}}}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$  et supposons que la distance de Hausdorff  $d_{\mathcal{H}}(\partial \mathcal{C}_{\mathcal{P}}, \partial \mathcal{U})$  soit  $\leq \varepsilon$  ainsi que tous les rayons des cercles de  $\mathcal{P}$ . On a le

**THÉORÈME 1.** *S'il existe une constante  $C$  telle que pour tous cercles  $c, c'$  de  $\mathcal{P}$ ,*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\text{rayon}(c)}{\text{rayon}(c')} \leq C.$$

*Alors  $f_{\mathcal{P}}$  converge uniformément sur les compacts de  $\mathcal{U}$  vers l'uniformisation de Riemann  $f$  de  $\mathcal{U}$ , lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.*

Ce théorème a été obtenu en premier par Kenneth Stephenson en 1991 (voir [St1] et [St2]). Sa preuve repose sur le lemme de Schwarz-Pick discret de [B-St2] et le théorème de récurrence de Pólya.

En 1993, Zheng-Xu He et Burt Rodin ont montré comme le résultat de rigidité de Rodin-Sullivan permettait de prouver le théorème 1 (voir [He-R]). Ils obtiennent également la même conclusion sous des hypothèses plus faibles:

**THÉOREME 2.** *On suppose que les valences des empilements  $\mathcal{P}$  sont bornées par un entier positif  $k_0$ .*

*Alors  $f_{\mathcal{P}}$  converge vers  $f$  uniformément sur les compacts de  $\mathcal{U}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.*

Leur méthode repose sur des arguments développés par He dans [He].  
*Rajouté sur épreuves:* Laurent Saloff-Coste a récemment amélioré l'inégalité de Harnack (voir [Sa]). Quant au théorème de Rodin-Sullivan, il a été considérablement généralisé par Zheng-Xu He et Oded Schramm (voir [He-Sc]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [Ahl] AHLFORS, L. *Lectures on quasi-conformal mappings*. Van Nostrand, 1982.
- [An] ANDREEV, E.M. On convex polyhedra in Lobačevskii spaces. *Mat. USSR Sbornik* 10 (1970), 413-440.
- [B] BEARDON, A. *The geometry of discrete groups*. Springer Verlag, 1983.
- [B-St1] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. The uniformisation theorem for circle packings. *Indiana University Math. J.* 39 (No. 4) (1990), 1383-1425.
- [B-St2] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. The Schwarz-Pick lemma for circle packings. *Ill. J. of Math.* 35 (No. 4) (1991), 577-606.
- [B-St3] BEARDON, A.-F. and K. STEPHENSON. Circle packings in different geometries. *Tôhoku Math. J.* 43 (1991), 27-36.
- [CV] COLIN DE VERDIÈRE, Y. Un principe variationnel pour les empilements de cercles. *Invent. Math.* 104 (1991), 655-669.
- [CV-M] COLIN DE VERDIÈRE, Y. et F. MATHÉUS. Empilements de cercles et approximations conformes. A paraître dans les Actes de la Table Ronde de Géométrie Riemannienne en l'honneur de Marcel Berger, Arthur L. Besse (éditeur), Collection SMF *Séminaires et Congrès N° 1*, 1996.
- [Do] DOOB, J. L. Discrete potential theory and boundaries. *Journal of Math. and Mech.* 8 (1959), 433-458.
- [D-S] DOYLE, P.-G. and J.-L. SNELL. *Random walks and electrical networks*. The Carus Math. Monographs, Math. Assoc. of America, 1984.
- [Du] DUFFIN, R.-J. Discrete potential theory. *Duke Math. Journal* 20 (1953), 233-251.
- [Ha] HANSEN, L.-J. On the Rodin and Sullivan ring lemma. *Complex variables, Theory and applications* 10 (1988), 23-30.
- [He] HE, Z.-X. An estimate for hexagonal circle packings. *J. of Differential Geom.* 33 (1991), 395-412.
- [He-R] HE, Z. X. and B. RODIN. Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mapping. *Communications in Analysis and Geometry* 1 (1) (1993), 31-41.