

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	42 (1996)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan
<b>Autor:</b>	Mathéus, Frédéric
<b>Kapitel:</b>	VI. Inégalité de Harnack
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-87874">https://doi.org/10.5169/seals-87874</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Considérons maintenant une isométrie hyperbolique  $j$  telle que  $j(K')$  ne contienne pas 0. Notons  $h_\lambda$  l'homothétie euclidienne de centre 0 de rapport  $1 + \lambda$ . On définit l'emplacement  $\mathcal{H}_\varepsilon^t(\lambda)$  comme étant l'image de  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  par l'application  $j^{-1} \circ h_\lambda \circ j$ .

Avec les notations du lemme 2, on pose

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = \frac{du_{\varepsilon, t}^s(t)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}.$$

$\varphi_\varepsilon^t$  vérifie *i)* d'après ce lemme. De plus, comme  $j$  est une isométrie, on a d'après le lemme 3,

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = - \frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh r_\varepsilon^s(t)}$$

où  $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$  est la distance à l'origine du centre du cercle de  $j(\mathcal{H}_\varepsilon^t)$  correspondant au sommet  $s$ . Déjà,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cosh r_\varepsilon^s(t) = 1$  d'après le point *iii)* de la proposition du IV.

Notons  $\delta$  la distance de 0 à  $j(K')$ , et  $\sigma, \sigma'$  les centres des cercles de  $j(\mathcal{H}_\varepsilon^t)$  images par  $j$  de deux cercles tangents de  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  correspondants aux sommets  $s$  et  $s'$  de  $S_\varepsilon^K$ .

Alors les longueurs  $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$  et  $\tilde{d}_\varepsilon^t(s')$  des côtés  $0\sigma$  et  $0\sigma'$  du triangle  $(0\sigma\sigma')$  sont minorées par  $\delta > 0$  tandis que la longueur  $r_\varepsilon^s(t) + r_\varepsilon^{s'}(t)$  du côté  $\sigma\sigma'$  tend vers 0 avec  $\varepsilon$  uniformément en  $t$ . On en déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s')} = 1, \quad \text{d'où} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon^t(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')} = 1,$$

la limite étant uniforme en  $t$ , ce qui prouve le point *ii)*.  $\square$

## VI. INÉGALITÉ DE HARNACK

Le but de cette section est de terminer la preuve du théorème de Rodin-Sullivan en démontrant la

**PROPOSITION** (Inégalité de Harnack). *Soit  $K$  un compact d'intérieur non vide contenu dans  $\mathcal{U}$  et  $A, B$  deux réels vérifiant  $0 < A < B$ .*

*Pour tout compact  $\tilde{K}$  d'intérieur non vide contenu dans  $\mathring{K}$ , il existe une constante  $C = C(\tilde{K})$  possédant la propriété suivante:*

Soit  $\Delta_\varepsilon$  un laplacien discret sur  $S_\varepsilon^K$  de la forme  $\Delta_\varepsilon \phi(s) = c_s^\varepsilon \phi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'}^\varepsilon \phi(s')$  et dont les coefficients vérifient:  $\forall s, s' \in S_\varepsilon^K, \forall \varepsilon > 0, c_s^\varepsilon \in [A, B]$  et  $-c_{ss'}^\varepsilon \in [A, B]$ .

Soit  $\psi_\varepsilon$  une fonction définie sur  $S_\varepsilon^K$ , à valeurs positives non nulles et telle que  $\Delta_\varepsilon \psi_\varepsilon = 0$ .

Alors pour tous sommets voisins  $s, s' \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ , on a:

$$\left| \frac{\Psi_\varepsilon(s)}{\Psi_\varepsilon(s')} - 1 \right| \leq \frac{C(\tilde{K})}{\sqrt{-\log \varepsilon}}.$$

Nous différons provisoirement la preuve de cette proposition, et montrons maintenant pourquoi celle-ci implique le lemme-clé de la section II. Soit donc  $\tilde{K}$  un compact d'intérieur non vide de  $\mathcal{U}$ . Il s'agit de voir que, grâce à la proposition, si  $s, s' \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$  sont voisins, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{\tilde{r}_\varepsilon^{s'}} = 1$$

et ce uniformément sur  $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ . On part de

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^{s'} &= u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} + \int_0^1 (\dot{u}_\varepsilon^s - \dot{u}_\varepsilon^{s'}) dt \\ &= u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} + \int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s \left( 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s} \right) dt. \end{aligned}$$

On a

$$u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} = \log \frac{\tanh \frac{rs'}{2}}{\tanh \frac{rs}{2}}$$

avec  $r_\varepsilon^s \sim r_\varepsilon^{s'} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  uniformément par rapport à  $s$  et  $s' \sim s$  dans  $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ , de sorte que  $u_\varepsilon^s - u_\varepsilon^{s'} \rightarrow 0$ .

Soit  $\phi_\varepsilon^t$  la fonction définie dans le lemme 4 de la section V avec un compact  $K$  contenu dans  $\mathcal{U}$  et dont l'intérieur contient  $\tilde{K}$ .

Soit  $\psi_\varepsilon^t$  la fonction définie par  $\dot{u}_\varepsilon^s(t) = \phi_\varepsilon^t(s) \cdot \psi_\varepsilon^t(s)$ . D'après le lemme 1 de V,  $\psi_\varepsilon^t$  est solution d'une équation du type  $\tilde{\Delta}_{\varepsilon, t} \psi_\varepsilon^t = 0$ . Comme  $\dot{u}_\varepsilon^s(t) < 0$  et que  $\phi_\varepsilon^t < 0$ , on a que  $\psi_\varepsilon^t > 0$ . De plus, les coefficients de  $\tilde{\Delta}_{\varepsilon, t}$  sont de la forme  $\tilde{c}_{ss'}^\varepsilon = \phi_\varepsilon^t(s) \phi_\varepsilon^t(s') c_{ss'}$ . Il résulte du point ii) de la proposition du IV, qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B > A > 0$  telles que  $A \leq -\tilde{c}_{ss'}^\varepsilon \leq B$  et  $A \leq \tilde{c}_s^\varepsilon \leq B$ . La proposition de la présente section assure alors que  $\frac{\psi_\varepsilon^t(s)}{\psi_\varepsilon^t(s')}$  tend vers 1 uniformément sur  $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$  et par rapport à  $t \in [0, 1]$ . D'après

le point *ii*) du lemme 4 de V, le quotient  $\frac{\varphi_\varepsilon^t(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')}$  possède la même propriété de sorte que  $\sup_{t \in [0, 1]} \left| 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}(t)}{\dot{u}_\varepsilon^s(t)} \right|$  tend vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  uniformément sur  $S_\varepsilon^{\tilde{K}}$ . Comme  $\dot{u}_\varepsilon^s < 0$  on a donc:

$$\left| \int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s \cdot \left( 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s} \right) dt \right| \leq \sup_{[0, 1]} \left| 1 - \frac{\dot{u}_\varepsilon^{s'}}{\dot{u}_\varepsilon^s} \right| \times \int_0^1 (-\dot{u}_\varepsilon^s) dt$$

et

$$-\int_0^1 \dot{u}_\varepsilon^s dt = u_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^s = \text{Log} \frac{\tanh \frac{\tilde{r}_\varepsilon^s}{2}}{\tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2}} \leq \text{Log} \frac{\tanh \frac{c_3 \varepsilon}{2}}{\tanh \frac{\varepsilon}{2c_3}}$$

où  $c_3$  est la constante fournie par le point *iii*) de la proposition de IV. D'après les propriétés de la fonction tanh au voisinage de 0, cette dernière quantité est majorée par une constante ne dépendant pas de  $\varepsilon$ . On en déduit que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_0^1 (\dot{u}_\varepsilon^s - \dot{u}_\varepsilon^{s'}) dt \right| = 0$  uniformément sur  $\tilde{K}$ . On en déduit donc que  $\text{Log} \left( \tanh \frac{r_\varepsilon^{s'}}{2} / \tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2} \right) = \tilde{u}_\varepsilon^s - \tilde{u}_\varepsilon^{s'}$  tend vers 0 avec  $\varepsilon$ , et ce uniformément sur  $\tilde{K}$ , de sorte que le rapport  $(\tanh \frac{r_\varepsilon^{s'}}{2} / \tanh \frac{r_\varepsilon^s}{2})$  tend vers 1. Comme les rayons  $\tilde{r}_\varepsilon^s$  et  $\tilde{r}_\varepsilon^{s'}$  tendent vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  (résulte des points *i*) et *iii*) de la proposition du IV), le rapport  $\frac{\tilde{r}_\varepsilon^{s'}}{\tilde{r}_\varepsilon^s}$  tend lui aussi vers 1 avec  $\varepsilon$  et uniformément sur  $\tilde{K}$ , ce qui est bien l'énoncé du lemme-clé. La version quantitative de ce lemme provient de l'estimation donnée dans la proposition.

Le théorème de Rodin-Sullivan est donc démontré modulo l'inégalité de Harnack. Nous terminons donc par la

*Preuve de la proposition.* Comme annoncé dans l'introduction, nous obtenons l'inégalité de Harnack par voie probabiliste. Le début de la preuve que voici s'inspire de [St2], §9.3 et de [Sp], §13-P1.

Introduisons la matrice de transition  $P_\varepsilon = [p_{ss'}^\varepsilon]_{s, s' \in S_\varepsilon^K}$  associée au laplacien  $\Delta_\varepsilon$  et définie par:

$$p_{ss'}^\varepsilon = -\frac{c_{ss'}^\varepsilon}{c_s^\varepsilon} \quad \text{si } s \sim s' \text{ et } p_{ss'}^\varepsilon = 0 \text{ sinon.}$$

On a  $p_{ss'}^\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $\forall s \in I_\varepsilon^K$  (les sommets intérieurs de  $S_\varepsilon^K$ ),  $\sum_{s' \sim s} p_{ss'}^\varepsilon = 1$ .

De plus, il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  ne dépendant que de  $A$  et  $B$  telles que  $0 < \alpha \leq p_{ss'}^\varepsilon \leq \beta < 1$ ,  $\forall \varepsilon$ ,  $\forall s \in I_\varepsilon^K$ ,  $\forall s' \in S_\varepsilon^K$  tel que  $s' \sim s$ .

Sur l'univers  $\Omega_\varepsilon = \{\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots) \in (S_\varepsilon^K)^\mathbb{N}\}$  on considère la tribu cylindrique  $\Sigma_\varepsilon$  engendrée par les événements  $\{\omega_{i_1} = s_1, \dots, \omega_{i_p} = s_p\}$  où

$p \in \mathbf{N}^*$ ,  $i_1, \dots, i_p \in \mathbf{N}$ ,  $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ , et  $s_1, \dots, s_p \in S_\varepsilon^K$ . On note  $X_n$  la variable aléatoire sur  $(\Omega_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$  à valeurs dans  $S_\varepsilon^K$  et définie par  $\forall \omega \in \Omega_\varepsilon$ ,  $X_n(\omega) = \omega_n$ .

Fixons un sommet  $s \in S_\varepsilon^K$ . On définit la probabilité  $P_s$  sur  $(\Omega_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$  associée à la marche aléatoire partant de  $s$ , de la façon suivante:

$$P_s(X_0 = s) = 1 \text{ et } P_s(X_{n+1} = v \mid X_n = u) = \begin{cases} p_{uv}^\varepsilon & \text{si } u \in I_\varepsilon^K \\ \delta_{u,v} & \text{si } u \in B_\varepsilon^K \end{cases}$$

( $B_\varepsilon^K$  sont les sommets frontières de  $S_\varepsilon^K$ ). En particulier, on décide que les sommets de  $B_\varepsilon^K$  sont absorbants.

Soit  $\tau_{B_\varepsilon^K}$  le premier temps d'atteinte du bord  $B_\varepsilon^K$ . C'est le temps d'arrêt défini par:  $\tau_{B_\varepsilon^K}(\omega) = \inf \{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } X_n(\omega) \in B_\varepsilon^K\}$ . On a le

LEMME 1. *Le temps d'arrêt  $\tau_{B_\varepsilon^K}$  est fini  $P_s$ -presque sûrement.*

*Preuve du lemme 1.* Soit  $h$  la fonction définie sur  $S_\varepsilon^K$  par  $h(s) = P_s\{\tau_{B_\varepsilon^K} < +\infty\}$ . La fonction  $h$  est harmonique pour  $\Delta_\varepsilon$  et vérifie  $h(s) = 1$ ,  $\forall s \in B_\varepsilon^K$  de sorte que, par unicité de la solution du problème de Dirichlet,  $h(s) = 1$ ,  $\forall s \in I_\varepsilon^K$ .  $\square$

Notons maintenant  $\mathbf{E}_s$  l'espérance pour la probabilité  $P_s$ . Pour toute fonction harmonique  $\Psi$ , on a  $\mathbf{E}_s \Psi(X_1) = \Psi(s)$ , puis (réurrence):  $\mathbf{E}_s \Psi(X_n) = \Psi(s)$ . Plus généralement, on a le

LEMME 2. *Pour toute fonction harmonique  $\Psi$  et pour tout temps d'arrêt  $\tau$  vérifiant  $\tau \leq \tau_{B_\varepsilon^K}$ , on a:  $\mathbf{E}_s \Psi(X_\tau) = \Psi(s)$ .*

*Preuve du lemme 2.* Nous nous contentons ici de résumer la preuve de J. L. Doob de ce résultat classique (voir [Do], théorème 2.1, p. 437).

Soit  $\mathcal{F}_n$  la tribu sur  $\Omega_\varepsilon$  engendrée par  $X_0, \dots, X_n$ . On observe que  $(\Psi(X_{\tau \wedge n}); \mathcal{F}_n)$  est une martingale, de sorte que la suite des espérances  $\mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n})$  est constante, donc:

$$\mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n}) = \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge (n-1)}) = \dots = \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge 0}) = \mathbf{E}_s \Psi(X_0) = \Psi(s).$$

D'autre part, comme  $S_\varepsilon^K$  est fini, la suite de fonctions  $\Psi(X_{\tau \wedge n})$  est bornée, de sorte que le théorème de convergence dominée assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}_s \Psi(X_{\tau \wedge n}) = \int_{\{\tau < +\infty\}} \Psi(X_\tau) dP_s.$$

Comme  $\tau \leq \tau_{B_\varepsilon^K}$  qui est presque sûrement fini, on en déduit

$$\Psi(s) = \mathbf{E}_s \Psi(X_\tau). \quad \square$$

Terminons la preuve de la proposition. Soit  $v \in S_\varepsilon^K$  un sommet voisin de  $s$ , et  $\tau_v$  le temps d'arrêt défini par:

$$\tau_v(\omega) = \inf\{n \in \mathbf{N} \text{ tel que } X_n(\omega) = v\}.$$

On applique le lemme 2 au temps d'arrêt  $\tau = \tau_v \wedge \tau_{B_\varepsilon^K}$  et à la fonction  $\psi_\varepsilon$  de l'énoncé de la proposition. Il vient:

$$\psi_\varepsilon(s) = \int_{\Omega_\varepsilon} \psi_\varepsilon(X_\tau) dP_s = \int_{\{\tau = \tau_v\}} \psi_\varepsilon(X_{\tau_v}) dP_s + \int_{\{\tau = \tau_{B_\varepsilon^K}\}} \psi_\varepsilon(X_{\tau_{B_\varepsilon^K}}) dP_s.$$

Comme  $\psi_\varepsilon$  est positive et que  $X_{\tau_v} = v$ , on en déduit:

$$\psi_\varepsilon(s) \geq \psi_\varepsilon(v) \times P_s\{\tau = \tau_v\}.$$

Il reste donc à mesurer l'écart à 1 de  $P_s\{\tau = \tau_v\}$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Fixons le sommet  $v \in I_\varepsilon^K$ , et considérons la fonction  $\Phi$  donnée par  $\Phi(s) = P_s\{\tau = \tau_v\}$ : c'est la probabilité qu'une marche aléatoire partant de  $s$  atteigne  $v$  avant le bord. On observe que  $\Phi(v) = 1$ , que  $\Phi(s) = 0$  si  $s \in s \in B_\varepsilon^K$  et que  $\Phi$  est harmonique sur  $S_\varepsilon^K$  sauf en  $v$  et sur  $B_\varepsilon^K$ .

Nous allons donner une interprétation électrique de  $\Phi$ . Considérons un circuit électrique de combinatoire  $\mathcal{C}_\varepsilon^K$  (i.e. la trace de  $\mathcal{C}_\varepsilon$  sur  $K$ ) tel que la conductance de l'arête  $ss'$  soit  $-c_{ss'}^\varepsilon$ . Si on branche tous les sommets de  $B_\varepsilon^K$  au potentiel 0 et le sommet  $v$  au potentiel 1 alors le potentiel au sommet  $s$  n'est autre que  $\Phi(s)$  (voir [D-S], p. 47). En égalant la puissance dissipée par le circuit et la puissance fournie par le générateur (voir [D-S], p. 61), on a:

$$\frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} -c_{ss'}^\varepsilon [\Phi(s) - \Phi(s')]^2 = C_{\text{eff}}^{v, B} [\Phi(v) - \Phi(B)]^2 = \frac{1}{R_{\text{eff}}^{v, B}}$$

où  $C_{\text{eff}}^{v, B}$  (resp.  $R_{\text{eff}}^{v, B}$ ) désigne la conductance effective (resp. résistance effective) du circuit entre  $v$  et le bord  $B = B_\varepsilon^K$ .

Il reste à évaluer  $R_{\text{eff}}^{v, B}$ . C'est l'objet du

**LEMME 3.** *Il existe une constante  $c_1(\tilde{K})$  ne dépendant que de  $\tilde{K}$  telle que  $\forall v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}, R_{\text{eff}}^{v, B} \geq \frac{-\log \varepsilon}{c_1(\tilde{K})}$ .*

Ce lemme termine la preuve de la proposition. En effet, pour tous sommets  $v \in S_\varepsilon^{\tilde{K}}$  et  $s \in S_\varepsilon^K$  voisin de  $v$ , on a:

$$\frac{1}{2} A [\Phi(v) - \Phi(s)]^2 \leq \frac{1}{R_{\text{eff}}^{v, B}} \leq \frac{c_1(\tilde{K})}{-\log \varepsilon}$$

de sorte que  $1 - P_s\{\tau = \tau_v\} \leq \frac{c}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$  avec  $c = \sqrt{\frac{2c_1(\tilde{K})}{A}}$ , ce qui est bien

l'estimation annoncée.

*Preuve du lemme 3.* On compare le circuit électrique étudié au circuit standard de combinatoire  $\mathcal{C}_\varepsilon^K$  pour lequel les résistances de toutes les arêtes sont égales à 1. On note  $\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}$  la résistance effective du circuit standard entre  $\nu$  et  $B = B_\varepsilon^K$ . D'après le principe de Dirichlet (voir [D-S], p. 63-64) on a:

$$\frac{1}{\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}} = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} -c_{ss'}^\varepsilon [\varphi(s) - \varphi(s')]^2 \mid \varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon^K}, \varphi = 0 \text{ sur } B_\varepsilon^K, \varphi(\nu) = 1 \right\}$$

et

$$\frac{1}{\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}} = \min \left\{ \frac{1}{2} \sum_{s \sim s'} [\varphi(s) - \varphi(s')]^2 \mid \varphi \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon^K}, \varphi = 0 \text{ sur } B_\varepsilon^K, \varphi(\nu) = 1 \right\}.$$

Compte tenu des estimations  $0 < A \leq -C_{ss'}^\varepsilon \leq B$ , on a:

$$\forall \nu \in I_\varepsilon^K, \quad A \leq \frac{\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}}{\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}} \leq B.$$

La fin de la preuve du lemme 3 repose sur les deux lemmes suivants. On commence par évaluer  $\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B}$  dans un cas particulier.

**LEMME 4.** *Si  $\mathcal{C}_\varepsilon^K$  est isomorphe à la triangulation d'un hexagone régulier de côté  $N$  par des triangles équilatéraux unités et si  $\nu$  est le centre de  $\mathcal{C}_\varepsilon^K$ , alors on a:*

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{\nu, B} \geq \frac{1}{12} \log N.$$

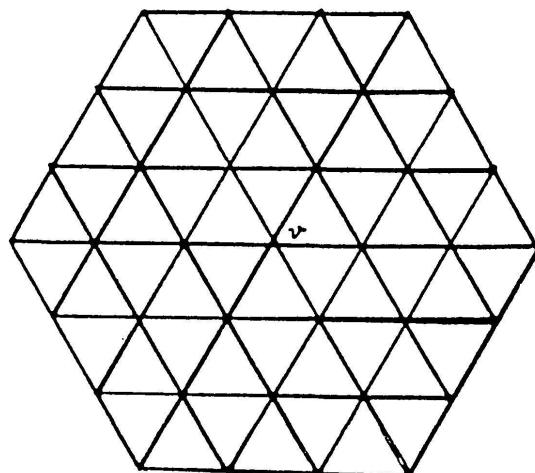


FIGURE 3  
La triangulation  $\mathcal{C}_\varepsilon^K$  avec  $N = 3$

*Preuve du lemme 4.* D'après la loi de monotonie de Rayleigh ([D-S], p. 67), si l'une des résistances du circuit standard diminue, alors la résistance  $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v, B}$  diminue. Remplaçons toute résistance joignant deux sommets à même distance combinatoire de  $v$  par la résistance nulle, de sorte que, pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ , les sommets à distance combinatoire  $k$  de  $v$  sont au même potentiel. Le circuit standard ainsi diminué est équivalent au circuit suivant (cf. fig. 4):

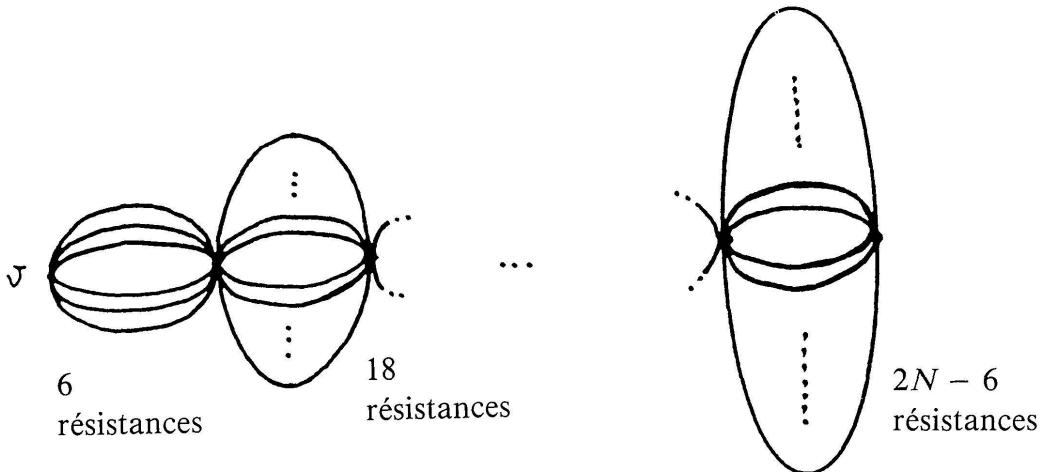


FIGURE 4  
Le circuit standard diminué

Comme  $n$  résistances de 1 Ohm en parallèle sont équivalentes à une résistance de  $\frac{1}{n}$  Ohm, la résistance du circuit ci-dessus entre ses deux extrémités est égale à  $\sum_{k=1}^N \frac{1}{12k-6}$  car il y a  $12k-6$  résistances entre la  $k-1^{\text{e}}$  et la  $k^{\text{e}}$  génération.

La résistance effective du circuit non modifié vérifie donc:

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v, B} \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{12k-6} \geq \frac{1}{12} \log N.$$

**LEMME 5.** Soit  $d(v)$  le rayon de la plus grande boule combinatoire de centre  $v$  et contenu dans  $S_\varepsilon^K$ .

Alors on a  $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v, B} \geq \frac{1}{12} \log d(v)$ .

*Preuve du lemme 5.*  $\mathcal{C}_\varepsilon^K$  contient une sous-triangulation, isomorphe à la triangulation d'un hexagone régulier de côté  $d(v)$  par des triangles équilatéraux unités, dont le centre est  $v$ , et dont le bord est noté  $B'$ . En remplaçant toutes les résistances en dehors de ce sous-circuit par des résistances nulles,

on amène le bord  $B'$  au potentiel 0. Toujours d'après la loi de monotonie de Rayleigh, on a alors:

$$\tilde{R}_{\text{eff}}^{v, B} \geq \tilde{R}_{\text{eff}}^{v, B} \geq \frac{1}{12} \log d(v),$$

la dernière inégalité résultant du lemme 4.  $\square$

*Fin de la preuve du lemme 3.* Soit  $\tilde{K}$  le compact de l'énoncé de la proposition. Rappelons qu'il est contenu dans l'intérieur de  $K$ . Notons  $\delta$  la distance hyperbolique de  $\tilde{K}$  à  $\mathbf{D}^2 \setminus K$ . Pour tout sommet  $v \in S_{\varepsilon}^{\tilde{K}}$  on a  $d(v) \geq \frac{\delta}{\varepsilon}$ , donc  $\tilde{R}_{\text{eff}}^{v, B} \geq -\frac{1}{12} \log \delta \varepsilon$ , ce qui est bien le résultat cherché.  $\square$

## VII. COMMENTAIRES

### 1. SUR L'INÉGALITÉ DE HARNACK

L'estimation obtenue ici en  $\frac{1}{\sqrt{-\log \varepsilon}}$  n'est ni optimale, ni propre aux réseaux récurrents, comme la preuve peut le laisser penser. Les résultats les plus significatifs ont été obtenu par Gregory Lawler (voir [La1] et [La2]). Soit  $u$  une fonction de  $\mathbf{Z}^d$  dans  $\mathbf{R}$ . On pose

$$\Delta_0 u(x) = u(x) - \frac{1}{2d} \sum_{s \sim x} u(s)$$

(la somme est étendue à tous les voisins de  $x$  dans le réseau  $\mathbf{Z}^d$ ).

**THÉORÈME 1.** *Il existe une constante  $C$  telle que si  $u$  est une fonction harmonique (pour  $\Delta_0$ ) positive sur la boule combinatoire de  $\mathbf{Z}^d$  de centre 0 de rayon  $N$ , alors*

$$\left| \frac{u(0)}{u(1)} - 1 \right| \leq \frac{C}{N}.$$

Dans le cas de la dimension 3, ce théorème avait déjà été démontré par R. J. Duffin ([Du]) dans les années cinquante. Dans [L1], G. Lawler étudie également les opérateurs à coefficients variables:

**THÉORÈME 2.** *Soit  $A, B$  deux réels vérifiant  $0 < A < B$ . Il existe alors deux réels  $C$  et  $\alpha$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ , qui ne dépendent que de  $A, B$  et  $d$ , et possédant la propriété suivante:*