

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	42 (1996)
<b>Heft:</b>	1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 EMPILEMENTS DE CERCLES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES: une nouvelle preuve du théorème de Rodin-Sullivan
<b>Autor:</b>	Mathéus, Frédéric
<b>Kapitel:</b>	V. Changement de variable
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-87874">https://doi.org/10.5169/seals-87874</a>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## V. CHANGEMENT DE VARIABLE

L'objet de cette section est de ramener l'étude de  $\dot{u}_\varepsilon \in \mathbf{R}^{S_\varepsilon}$  qui est solution d'une équation de Schrödinger discrète, à celle d'une fonction harmonique sur  $S_\varepsilon$ , solution d'un problème de Dirichlet. Le point de départ de cette réduction est le

**LEMME 1.** *Soit  $\varphi: S_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R}$  une solution d'une équation de Schrödinger discrète du type  $(\Delta + V)\varphi = 0$  où  $V: S_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R}_+$  et  $(\Delta\varphi)(s) = c_s\varphi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi(s')$ ,  $\forall s \in I_\varepsilon$  avec  $c_s > 0$ ,  $c_{ss'} < 0$ ,  $c_{ss'} = c_{s's}$  et  $\forall s \in I_\varepsilon$ ,  $c_s + \sum_{s' \sim s} c_{ss'} = 0$ . Soit  $\varphi_0: S_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R}^*$  une autre fonction vérifiant  $(\Delta + V)\varphi_0 = 0$ .*

*Alors la fonction  $\Psi = \varphi/\varphi_0$  est solution de  $\tilde{\Delta}\Psi = 0$ , où l'opérateur  $\tilde{\Delta}$  est donné par  $\tilde{\Delta}\Psi(s) = \tilde{c}_s\Psi(s) + \sum_{s' \sim s} \tilde{c}_{ss'}\Psi(s')$ ; les coefficients  $\tilde{c}_s$  et  $\tilde{c}_{ss'}$  vérifient les mêmes propriétés que les  $c_s$  et  $c_{ss'}$  et sont donnés par:  $\tilde{c}_{ss'} = \varphi_0(s)\varphi_0(s')c_{ss'}$ .*

*Preuve du lemme 1.* Elle est élémentaire: sachant que  $(\Delta + V)(\varphi_0\Psi) = 0$ , on a  $\forall s \in I_\varepsilon$ ,

$$c_s\varphi_0(s)\Psi(s) + \sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')\Psi(s') + V(s)\varphi_0(s)\Psi(s) = 0. \quad (*)$$

Comme  $(\Delta + V)\varphi_0 = 0$ , on a

$$c_s\varphi_0(s) + V(s)\varphi_0(s) = - \sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')$$

d'où, en reportant dans (\*),  $\sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')[\Psi(s') - \Psi(s)] = 0$ , d'où  $\tilde{\Delta}\Psi(s) = 0$  avec  $\tilde{c}_{ss'} = c_{ss'}\varphi_0(s')\varphi_0(s)$  et  $\tilde{c}_s = - \sum_{s' \sim s} c_{ss'}\varphi_0(s')\varphi_0(s)$ , ce qui prouve le lemme 1.  $\square$

Pour appliquer ce lemme à  $\varphi = \dot{u}_\varepsilon$  et à l'opérateur  $\Delta_b^{\varepsilon, t} + V$  obtenu à la section III, il faut maintenant construire une solution explicite  $\varphi_0$ . Voici un procédé général:

**LEMME 2.** *Soit  $\mathcal{H}_\varepsilon^t(\lambda), \lambda \in ]-\alpha, \alpha[$  une déformation continûment dérivable de l'empilement  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  telle que  $\mathcal{H}_\varepsilon^t(0) = \mathcal{H}_\varepsilon^t$ , et  $u_{\varepsilon, \lambda}(t)$*

$\in [0, +\infty[^{S_\varepsilon}$  la fonction définie sur  $S_\varepsilon$  associée aux rayons de l'empilement  $\mathcal{H}_\varepsilon^t(\lambda)$ .

Alors on a  $(\Delta_b^{\varepsilon, t} + V) \frac{du_{\varepsilon, \lambda}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0$ .

*Preuve du lemme 2.* Soit  $F: \mathbf{R}_+^{B_\varepsilon} \times \mathbf{R}_+^{I_\varepsilon} \rightarrow \mathbf{R}$  la fonctionnelle construite par Yves Colin de Verdière dans [CV] et évoquée à la section III. Puisque pour tout  $\lambda \in ]-\alpha, \alpha[$ ,  $\mathcal{H}_\varepsilon^t(\lambda)$  est un empilement de cercles, on a  $d_I F(u_{\varepsilon, \lambda}^{B_\varepsilon}, u_{\varepsilon, \lambda}^{I_\varepsilon}) = 0$ . En dérivant par rapport à  $\lambda$ , il vient:

$$\forall \lambda \in ]-\alpha, \alpha[, \sum_{s \in I_\varepsilon} \left( \sum_{d_c(s|s) \leq 1} \frac{\partial K_s[u_{\varepsilon, \lambda}]}{\partial u_{\varepsilon}^{s'}} \cdot \frac{du_{\varepsilon, \lambda}^{s'}}{d\lambda} \right) du_{\varepsilon}^s = 0.$$

En  $\lambda = 0$ , on a:

$$\forall s \in I_\varepsilon, \frac{\partial K_s(u_\varepsilon)}{\partial u_\varepsilon^s} \cdot \left( \frac{du_{\varepsilon, \lambda}^s}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} + \sum_{s' \sim s} \frac{\partial K_s(u_\varepsilon)}{\partial u_\varepsilon^{s'}} \cdot \left( \frac{du_{\varepsilon, \lambda}^{s'}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = 0$$

c'est-à-dire exactement  $(\Delta_b^{\varepsilon, t} + V) \cdot \left( \frac{du_{\varepsilon, \lambda}}{d\lambda} \right)_{\lambda=0} = 0$ .  $\square$

Il reste maintenant à fabriquer une déformation explicite de l'empilement  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$ .

En guise de premier essai, on va examiner l'image de l'empilement  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  par l'homothétie euclidienne de centre 0 et de rapport  $1 + \lambda$ . Pour une raison qui sera expliquée plus loin, ça n'est pas cet exemple que nous retiendrons en définitive. Néanmoins, on peut en dégager certaines informations qui seront utiles:

**LEMME 3.** Soit, dans le disque hyperbolique, un cercle  $C$  de rayon  $r$  et dont le centre est à distance hyperbolique  $d > r$  de l'origine. Soit  $r_\lambda$  le rayon (hyperbolique) de l'image de  $C$  par l'homothétie euclidienne de centre 0 et de rapport  $1 + \lambda$ .

Si  $u_\lambda = -\text{Log} \tanh \frac{r_\lambda}{2}$ , alors  $\frac{du_\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = -\frac{\cosh d}{\cosh r}$ .

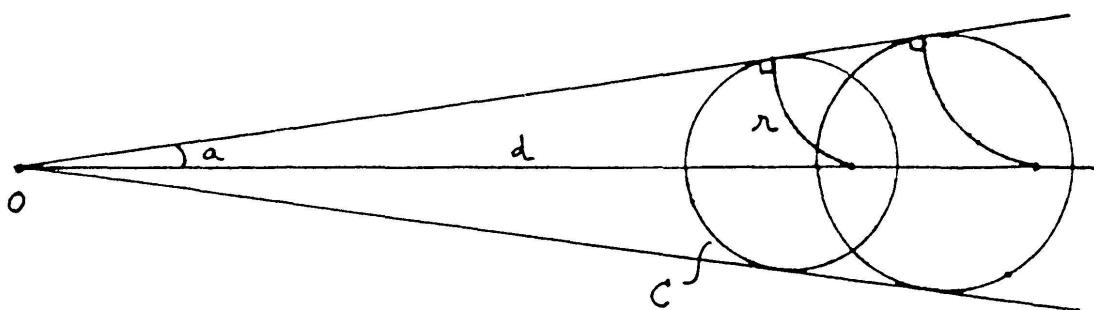


FIGURE 2

*Preuve du lemme 3.* Notons  $\alpha$  le demi-angle sous lequel le cercle  $C$  est vu du point 0 (cf. fig. 2). D'après les formules de trigonométrie hyperbolique dans le triangle rectangle (voir [B], p. 148), on a

$$\sinh r = \sin \alpha \cdot \sinh d \quad (*)$$

Notons  $\delta$  la distance euclidienne du centre hyperbolique de  $C$  à l'origine. On rappelle que  $d = \text{Log} \frac{1+\delta}{1-\delta}$  et que  $\delta = \tanh \frac{d}{2}$ . On en déduit que  $\sinh d = \frac{2\delta}{1-\delta^2}$ , de sorte que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (\sinh h) \Big|_{\lambda=0} &= \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{2(1+d)\delta}{1-(1+\lambda)^2\delta^2} \right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{2\delta}{1-\delta^2} \cdot \frac{1+\delta^2}{1-\delta^2} \\ &= \sinh d \cdot \cosh d. \end{aligned}$$

En dérivant (\*) par rapport à  $\lambda$  en  $\lambda = 0$ , il vient donc, comme  $\alpha$  est constant,

$$\cosh r \cdot \frac{dr}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \sin \alpha \times \frac{d}{d\lambda} (\sinh d) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\sinh r}{\sinh d} \times \sinh d \cdot \cosh d,$$

de sorte

$$\frac{1}{\sinh r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \frac{\cosh d}{\cosh r}.$$

Comme

$$u = -\text{Log} \tanh \frac{r}{2} = \int_r^{+\infty} \frac{d\sigma}{\sinh \sigma} \quad \text{on a} \quad \frac{du}{d\lambda} \Big|_0 = -\frac{1}{\sinh r} \cdot \frac{dr}{d\lambda} \Big|_0 = -\frac{\cosh d}{\cosh r}. \quad \square$$

Voici le résultat qui, joint à la section suivante, nous permettra de conclure:

LEMME 4. Soit  $K$  un compact de  $\mathcal{U}$  et  $S_\varepsilon^K$  l'ensemble des sommets de  $S_\varepsilon$  dans  $K$ . Alors il existe une fonction  $\varphi_\varepsilon^t: S_\varepsilon \rightarrow \mathbf{R}_+^*$  vérifiant:

- (i)  $(\Delta_b^{\varepsilon,t} + V)\varphi_\varepsilon^t = 0$
- (ii)  $\forall s, s' \in S_\varepsilon^K$  tels que  $s' \sim s$ , on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon^t(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')} = 1$ .

*Preuve du lemme 4.* On observe tout d'abord qu'il existe un compact  $K'$  du disque hyperbolique tel que si  $\varepsilon$  est assez petit alors pour tout  $t \in [0, 1]$ , tous les cercles de  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  correspondant à des sommets dans  $S_\varepsilon^K$  sont contenus dans  $K'$ . Ceci résulte du point *iii*) de la proposition de la section IV et du fait que le diamètre combinatoire de  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  est  $\leq \frac{C}{\varepsilon}$ , la constante  $C$  ne dépendant que de  $\mathcal{U}$ .

Considérons maintenant une isométrie hyperbolique  $j$  telle que  $j(K')$  ne contienne pas 0. Notons  $h_\lambda$  l'homothétie euclidienne de centre 0 de rapport  $1 + \lambda$ . On définit l'emplacement  $\mathcal{H}_\varepsilon^t(\lambda)$  comme étant l'image de  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  par l'application  $j^{-1} \circ h_\lambda \circ j$ .

Avec les notations du lemme 2, on pose

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = \frac{du_{\varepsilon, t}^s(t)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}.$$

$\varphi_\varepsilon^t$  vérifie *i)* d'après ce lemme. De plus, comme  $j$  est une isométrie, on a d'après le lemme 3,

$$\varphi_\varepsilon^t(s) = - \frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh r_\varepsilon^s(t)}$$

où  $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$  est la distance à l'origine du centre du cercle de  $j(\mathcal{H}_\varepsilon^t)$  correspondant au sommet  $s$ . Déjà,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \cosh r_\varepsilon^s(t) = 1$  d'après le point *iii)* de la proposition du IV.

Notons  $\delta$  la distance de 0 à  $j(K')$ , et  $\sigma, \sigma'$  les centres des cercles de  $j(\mathcal{H}_\varepsilon^t)$  images par  $j$  de deux cercles tangents de  $\mathcal{H}_\varepsilon^t$  correspondants aux sommets  $s$  et  $s'$  de  $S_\varepsilon^K$ .

Alors les longueurs  $\tilde{d}_\varepsilon^t(s)$  et  $\tilde{d}_\varepsilon^t(s')$  des côtés  $0\sigma$  et  $0\sigma'$  du triangle  $(0\sigma\sigma')$  sont minorées par  $\delta > 0$  tandis que la longueur  $r_\varepsilon^s(t) + r_\varepsilon^{s'}(t)$  du côté  $\sigma\sigma'$  tend vers 0 avec  $\varepsilon$  uniformément en  $t$ . On en déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s)}{\cosh \tilde{d}_\varepsilon^t(s')} = 1, \quad \text{d'où} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varphi_\varepsilon^t(s)}{\varphi_\varepsilon^t(s')} = 1,$$

la limite étant uniforme en  $t$ , ce qui prouve le point *ii)*.  $\square$

## VI. INÉGALITÉ DE HARNACK

Le but de cette section est de terminer la preuve du théorème de Rodin-Sullivan en démontrant la

**PROPOSITION** (Inégalité de Harnack). *Soit  $K$  un compact d'intérieur non vide contenu dans  $\mathcal{U}$  et  $A, B$  deux réels vérifiant  $0 < A < B$ .*

*Pour tout compact  $\tilde{K}$  d'intérieur non vide contenu dans  $\mathring{K}$ , il existe une constante  $C = C(\tilde{K})$  possédant la propriété suivante:*