

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 42 (1996)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** MOYENNES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE DIVISEURS D'UN ENTIER  
**Autor:** De Koninck, Jean-Marie / Grah, Jacques  
**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-87873>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

- $1 < m_0 < n_0$  avec  $(m_0, n_0) = 1$ ,  $f(m_0 n_0) \neq f(m_0) + f(n_0)$   
 $f(ln) = f(l) + f(n)$  pour tout  $n$  et  $l$  ( $1 \leq l < m_0$ ),  $(l, n) = 1$   
 $f(m_0 r) = f(m_0) + f(r)$  pour tout  $r$ ,  $1 \leq r < n_0$  et  $(m_0, r) = 1$ .

D'autre part, puisque tout diviseur de  $m_0 n_0$  est le produit de deux entiers relativement premiers, l'un divisant  $m_0$  et l'autre divisant  $n_0$ , et qu'en plus  $\check{f}_A \in \mathcal{A}$  (avec  $(U *_A g)(n) \neq 0$ ,  $\forall n \geq 1$ ), il suit que

$$(Uf *_A g)(m_0 n_0) = (Uf *_A g)(m_0)(U *_A g)(n_0) \\ + (Uf *_A g)(n_0)(U *_A g)(m_0),$$

soit l'égalité

$$\sum_{\substack{d_1 \mid n_0, d_1 \in An_0 \\ d_2 \mid m_0, d_2 \in Am_0}} U(d_1 d_2) f(d_1 d_2) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right) \\ = \sum_{\substack{d_1 \mid n_0, d_1 \in An_0 \\ d_2 \mid m_0, d_2 \in Am_0}} U(d_1) U(d_2) (f(d_1) + f(d_2)) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right),$$

qui peut également s'écrire

$$\sum_{\substack{d_1 \mid n_0, d_1 \in An_0 \\ d_2 \mid m_0, d_2 \in Am_0}} U(d_1 d_2) (f(d_1 d_2) - f(d_1) - f(d_2)) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right) = 0.$$

Mais tous les termes de cette somme sont nuls sauf lorsque  $d_1 = n_0$  et  $d_2 = m_0$ . Il suit que  $U(m_0 n_0) (f(m_0 n_0) - f(n_0) - f(m_0)) = 0$ , i.e.  $f(m_0 n_0) = f(m_0) + f(n_0)$ , ce qui contredit le choix minimal de  $m_0$ . D'où l'additivité de  $f$ . La démonstration du cas où  $f \in \mathcal{M}$  se fait de manière analogue.

**REMARQUE.** Pour déduire la réciproque du théorème 2.2 dans le cas de  $\bar{f}$  et celui de  $\tilde{f}$ , en utilisant le théorème 5.5, il faut poser  $U = g \equiv 1$ : on obtient alors successivement  $\check{f}_A = \bar{f}$  en substituant  $*$  à  $*_A$  et  $\check{f}_A = \tilde{f}$ , en substituant  $*_u$  à  $*_A$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] APOSTOL, T. M. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer-Verlag (New York), 1976.
- [2] BINGHAM, N. H., C. M. GOLDIE and J. L. TEUGELS. *Regular Variation*. Encyclopedia of mathematics and its applications (27), Cambridge University Press, 1989.

- [3] DE KONINCK, J. M. et A. MERCIER. Les fonctions arithmétiques et le plus grand facteur premier. *Acta Arith.* 52 (1989), 25-48.
- [4] DUNCAN, R. L. Note on the divisors of a number. *Amer. Math. Monthly* 68 (1961), 356-359.
- [5] McCARTHY, P. J. *Introduction to Arithmetical Functions*. Springer-Verlag (New York), 1986.
- [6] NARKIEWICZ, W. On a class of arithmetical convolutions. *Colloq. Math.* 10 (1963), 81-94.
- [7] SENETA, E. *Regularly varying functions*. Lecture Notes in Mathematics 508, Springer Verlag, 1976.
- [8] SUBBARAO, M. V. On some arithmetic convolutions. Lecture Notes in Mathematics 251, 247-271, Springer-Verlag, 1972.

(*Reçu le 17 novembre 1994; version révisée reçue le 20 juillet 1995.*)

Jean-Marie De Koninck  
Jacques Grah

Département de mathématiques et de statistique  
Université Laval  
Québec G1K 7P4  
Canada

vide-leer-empty