$$1 < m_0 < n_0 \text{ avec } (m_0, n_0) = 1, \quad f(m_0 n_0) \neq f(m_0) + f(n_0)$$
$$f(ln) = f(l) + f(n) \text{ pour tout } n \text{ et } l \ (1 \leqslant l < m_0),\ (l, n) = 1$$
$$f(m_0 r) = f(m_0) + f(r) \text{ pour tout } r, 1 \leqslant r < n_0 \text{ et } (m_0, r) = 1\ .$$

D'autre part, puisque tout diviseur de $m_0 n_0$ est le produit de deux entiers relativement premiers, l'un divisant m_0 et l'autre divisant n_0, et qu'en plus $\check{f}_A \in \mathscr{A}$ (avec $(U *_A g)(n) \neq 0, \forall n \geqslant 1$), il suit que

$$(Uf *_A g)(m_0 n_0) = (Uf *_A g)(m_0)(U *_A g)(n_0) + (Uf *_A g)(n_0)(U *_A g)(m_0)\ ,$$

soit l'égalité

$$\sum_{\substack{d_1 | n_0,\, d_1 \in A n_0 \\ d_2 | m_0,\, d_2 \in A m_0}} U(d_1 d_2) f(d_1 d_2) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right)$$
$$= \sum_{\substack{d_1 | n_0,\, d_1 \in A n_0 \\ d_2 | m_0,\, d_2 \in A m_0}} U(d_1) U(d_2) \big(f(d_1) + f(d_2)\big) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right),$$

qui peut également s'écrire

$$\sum_{\substack{d_1 | n_0,\, d_1 \in A n_0 \\ d_2 | m_0,\, d_2 \in A m_0}} U(d_1 d_2) \big(f(d_1 d_2) - f(d_1) - f(d_2)\big) g\left(\frac{m_0 n_0}{d_1 d_2}\right) = 0\ .$$

Mais tous les termes de cette somme sont nuls sauf lorsque $d_1 = n_0$ et $d_2 = m_0$. Il suit que $U(m_0 n_0)\big(f(m_0 n_0) - f(n_0) - f(m_0)\big) = 0$, i.e. $f(m_0 n_0) = f(m_0) + f(n_0)$, ce qui contredit le choix minimal de m_0. D'où l'additivité de f. La démonstration du cas où $f \in \mathscr{M}$ se fait de manière analogue.

Remarque. Pour déduire la réciproque du théorème 2.2 dans le cas de $\bar{f}$ et celui de $\tilde{f}$, en utilisant le théorème 5.5, il faut poser $U = g \equiv 1$: on obtient alors successivement $\check{f}_A = \bar{f}$ en substituant $*$ à $*_A$ et $\check{f}_A = \tilde{f}$, en substituant $*_u$ à $*_A$.

RÉFÉRENCES

[1] Apostol, T.M. *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag (New York), 1976.

[2] Bingham, N.H., C.M. Goldie and J.L. Teugels. *Regular Variation.* Encyclopedia of mathematics and its applications (27), Cambridge University Press, 1989.

[3] De Koninck, J. M. et A. Mercier. Les fonctions arithmétiques et le plus grand facteur premier. *Acta Arith. 52* (1989), 25-48.
[4] Duncan, R. L. Note on the divisors of a number. *Amer. Math. Monthly 68* (1961), 356-359.
[5] McCarthy, P. J. *Introduction to Arithmetical Functions.* Springer-Verlag (New York), 1986.
[6] Narkiewicz, W. On a class of arithmetical convolutions. *Colloq. Math. 10* (1963), 81-94.
[7] Seneta, E. *Regularly varying functions.* Lecture Notes in Mathematics 508, Springer Verlag, 1976.
[8] Subbarao, M. V. On some arithmetic convolutions. Lecture Notes in Mathematics 251, 247-271, Springer-Verlag, 1972.

(Reçu le 17 novembre 1994; version revisée reçue le 20 juillet 1995.)

Jean-Marie De Koninck
Jacques Grah

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval
Québec G1K 7P4
Canada

vide-leer-empty