

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 42 (1996)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MOYENNES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE DIVISEURS D'UN ENTIER
Autor: De Koninck, Jean-Marie / Grah, Jacques
Kapitel: 4. Mesure de l'écart entre f et les moyennes \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f}
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-87873>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EXEMPLE. Si $f(n) = \log \tau(n)$ et $m = 1$, alors

$$x^{-1} \sum_{n \leq x} \bar{f}(n) = \frac{\log 2}{2} \log \log x + \frac{\log 2}{2} C \\ + \sum_{r \geq 2} \sum_p \frac{1}{r(r+1)p^r} \log \left(\frac{(r+1)^r}{r!} \right) + O(1/\log x).$$

4. MESURE DE L'ÉCART ENTRE f ET LES MOYENNES \bar{f} , \hat{f} ET \tilde{f}

Nous allons étudier le moment d'ordre deux (selon le sens des définitions des moyennes \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f}) de l'écart entre $\bar{f}(n)$, $\hat{f}(n)$ et $\tilde{f}(n)$ et les valeurs de f sur les diviseurs de n .

Etant donné une fonction arithmétique f , on lui associe les trois opérateurs

$$\bar{\Delta} f(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} (f(d) - \bar{f}(n))^2, \\ \hat{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) (f(d) - \hat{f}(n))^2, \\ \tilde{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} (f(d) - \tilde{f}(n))^2.$$

Ainsi on remarque que

$$\bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} \{f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2\bar{f}(n)f(d)\} \\ = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2 \frac{\bar{f}(n)}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d) \\ = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2$$

et donc que

$$(4.1) \quad \bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d|n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 = \overline{f^2}(n) - \bar{f}(n)^2,$$

$$(4.2) \quad \hat{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d|n} \mu^2(d) f(d)^2 - \hat{f}(n)^2 = \hat{f^2}(n) - \hat{f}(n)^2,$$

$$(4.3) \quad \tilde{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d|n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)^2 - \tilde{f}(n)^2 = \tilde{f^2}(n) - \tilde{f}(n)^2.$$

Le prochain résultat montre que tout comme \bar{T} , \hat{T} et \tilde{T} , les opérateurs $\bar{\Delta}$, $\hat{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}$ préservent l'additivité. Alors qu'il est facile de vérifier qu'aucun de ces trois opérateurs ne préserve la multiplicativité, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. *Si $f \in \mathcal{A}$ alors $\bar{\Delta}f$, $\hat{\Delta}f$ et $\tilde{\Delta}f$ appartiennent aussi à \mathcal{A} , et en particulier on a*

$$(4.4) \quad \bar{\Delta}f(n) = \sum_{p^\alpha || n} \frac{1}{1+\alpha} \sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m)^2 - \sum_{p^\alpha || n} \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\sum_{m=1}^{\alpha} f(p^m) \right)^2,$$

$$(4.5) \quad \hat{\Delta}f(n) = \frac{1}{4} \sum_{p|n} f(p)^2 \in \mathcal{FA},$$

$$(4.6) \quad \tilde{\Delta}f(n) = \frac{1}{4} \sum_{p^\alpha || n} f(p^\alpha)^2.$$

Démonstration. Nous allons faire la preuve uniquement pour $\bar{\Delta}$, les autres relations se démontrant de manière analogue. Soient m et n deux entiers naturels relativement premiers et f une fonction quelconque choisie dans \mathcal{A} , alors

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}f(nm) &= \frac{1}{\tau(nm)} \sum_{d|nm} f(d)^2 - \bar{f}(nm)^2 \\ &= \frac{1}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} \{f(d_1) + f(d_2)\}^2 - (\bar{f}(n) + \bar{f}(m))^2 \\ &= \bar{\Delta}f(n) + \bar{\Delta}f(m) - 2\bar{f}(n)\bar{f}(m) + \frac{2}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1)f(d_2). \end{aligned}$$

C'est pourquoi le résultat suit de l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau(n)\tau(m)} \sum_{\substack{d_1|n \\ d_2|m}} f(d_1)f(d_2) &= \left(\frac{1}{\tau(n)} \sum_{d_1|n} f(d_1) \right) \left(\frac{1}{\tau(m)} \sum_{d_2|m} f(d_2) \right) \\ &= \bar{f}(n)\bar{f}(m). \end{aligned}$$

Et le théorème est démontré.

COROLLAIRE 4.2. *Si $f \in \mathcal{CA}$, alors $\bar{\Delta}f(n) = \frac{1}{12} \sum_{p^\alpha || n} \alpha(\alpha+2)f(p)^2$*

$\geq \frac{1}{4} \sum_{p|n} f(p)^2 = \hat{\Delta}f(n)$ et $\tilde{\Delta}f \geq \hat{\Delta}f$. Par ailleurs, si $f \in \mathcal{FA}$, alors $\tilde{\Delta}f = \hat{\Delta}f$ et de plus

$$\frac{1}{4} \sum_{p^\alpha || n} \frac{1}{\alpha} f(p)^2 \leq \bar{\Delta}f(n) = \sum_{p^\alpha || n} \frac{\alpha}{(\alpha+1)^2} f(p)^2 \leq \hat{\Delta}f(n).$$

REMARQUES

1) Il découle du corollaire 4.2 que si f est totalement additive, l'écart entre $f(n)$ et $\hat{f}(n)$ est plus petit qu'entre $f(n)$ et $\bar{f}(n)$, alors que si f est fortement additive, c'est le contraire qui se produit.

2) A partir des définitions de $\bar{\Delta}f$, $\hat{\Delta}f$, $\tilde{\Delta}f$ et des égalités (4.1), (4.2) et (4.3), il est intéressant de souligner que, pour toute fonction arithmétique f , on a les inégalités $\overline{f^2} \geq \bar{f}^2$, $\tilde{f}^2 \geq \tilde{f}^2$ et $\hat{f}^2 \geq \hat{f}^2$, et qu'en particulier sur les entiers libres de carrés, on a $\bar{\Delta}f(n) = \hat{\Delta}f(n) = \tilde{\Delta}f(n)$.

5. GÉNÉRALISATIONS ET EXEMPLES

Les fonctions \bar{f} , \hat{f} et \tilde{f} définies par les égalités (1.3), représentent essentiellement trois moyennes de f évaluées respectivement sur les diviseurs, les diviseurs libres de carrés et les diviseurs unitaires d'un entier. Nous allons maintenant montrer comment certaines propriétés satisfaites par ces trois fonctions demeurent valables lorsque les moyennes sont évaluées sur d'autres classes de diviseurs d'un entier.

Etant donné un entier naturel n , on désigne par D_n l'ensemble des diviseurs (positifs) de n . Soit alors A une famille d'ensembles A_n tels que $A_n \subset D_n$ pour chaque $n \in \mathbf{N}$. Par exemple, en désignant par I_n l'ensemble des diviseurs impairs de l'entier positif n , la famille A constituée de tous les ensembles I_n est un exemple typique.

Etant donné une famille $A := \{A_n : n \in \mathbf{N}\}$, alors à chaque ensemble A_n , on associe son cardinal soit la fonction $\tau_A(n)$ définie par

$$\tau_A(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d \in A_n}} 1$$

qu'on peut aussi écrire $(1 *_A 1)(n)$, avec $*_A$ pour signifier que seuls les diviseurs d de n qui appartiennent à A_n sont pris en considération. Nous nous intéressons ici aux familles pour lesquelles les ensembles A_n possèdent une fonction τ_A multiplicative et jamais nulle.

EXEMPLES. Soit $k \in \mathbf{N}$ et $2 \leq y \in \mathbf{R}$. Définissons de plus $P(1) = 1$ et $P(n) = \max\{p : p | n\}$. Alors les ensembles

$$\begin{aligned} A_n(k) &= \{d : d | n \text{ et } d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}, 0 \leq \alpha_i < k\} \\ &= \{d : d | n \text{ et } d \text{ est } k\text{-libre}\}, k \geq 2, \end{aligned}$$

$$B_n(y) = \{d : d | n \text{ et } P(d) \leq y\},$$

$$E_n(k) = \left\{ d : d^k | n \text{ et } \left(d^k, \frac{n}{d^k} \right) = 1 \right\}$$