Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 42 (1996)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MOYENNES SUR CERTAINS ENSEMBLES DE DIVISEURS D'UN ENTIER

Autor: De Koninck, Jean-Marie / Grah, Jacques

Kapitel: 3. Valeurs moyennes de $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87873

3. Valeurs moyennes de $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$

Soit f une fonction arithmétique. S'il existe une fonction continue monotone g définie sur $[1, +\infty[$ et telle que $\sum_{n \leqslant x} f(n) \sim \sum_{n \leqslant x} g(n)$, lorsque $x \to \infty$, on dit que g est une *valeur moyenne* (ou un *ordre moyen*) de f.

On dit qu'une fonction mesurable $R : [2, +\infty[\to \mathbf{R}^+$ est une fonction *à variation régulière* s'il existe un nombre réel $\rho \geqslant 0$ tel que pour chaque $a > 0$ on a $\lim_{x \to \infty} \dfrac{R(ax)}{R(x)} = a^\rho$. Compte tenu de la nature des applications considérées ci-dessous, nous n'étudions que les fonctions continûment dérivables à variation régulière. Si $\rho = 0$, on dit que R est *à oscillation lente*. Désignons par $\mathscr{L}$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables à oscillation lente. On peut montrer (voir le livre de Seneta [7], p. 2) que toute fonction à variation régulière R peut s'écrire sous la forme $R(x) = x^\rho L(x)$, où $\rho \in \mathbf{R}$ et $L \in \mathscr{L}$. Il est démontré dans Seneta ([7], p. 7) que $L \in \mathscr{L}$ si et seulement si $\dfrac{xL'(x)}{L(x)} = o(1)$ lorsque $x \to \infty$. Nous utiliserons l'expression fonction régulière pour signifier fonction à variation régulière. Si la fonction g ci-dessus est régulière, on dit que la fonction arithmétique f possède une valeur moyenne régulière.

Voyons maintenant dans quel sens on pourra dire que la valeur moyenne régulière de f est unique. D'abord signalons que si f possède deux valeurs moyennes monotones régulières R et S alors R et S sont asymptotiquement équivalentes. En effet, soit $R(x) = x^{\rho_1} L_1(x)$ et $S(x) = x^{\rho_2} L_2(x)$ (où L_1 et L_2 sont deux fonctions à oscillation lente) telles que, lorsque $x \to \infty$,

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} f(n) \sim x^{-1} \sum_{n \leqslant x} R(n) \quad \text{et} \quad x^{-1} \sum_{n \leqslant x} f(n) \sim x^{-1} \sum_{n \leqslant x} S(n) .$$

On ne restreint pas la généralité en supposant $\rho_1, \rho_2 > -1$. On a alors $\sum_{n \leqslant x} n^{\rho_1} L_1(n) \sim \sum_{n \leqslant x} n^{\rho_2} L_2(n)$, et il s'ensuit que $\int_1^x t^{\rho_1} L_1(t)\,dt \sim \int_1^x t^{\rho_2} L_2(t)\,dt$. En utilisant un résultat classique dû à Karamata (voir Bingham, Goldie and Teugels [2], p. 26), on en déduit que

$$\frac{x^{\rho_1 + 1}}{\rho_1 + 1} L_1(x) \sim \frac{x^{\rho_2 + 1}}{\rho_2 + 1} L_2(x) \text{ et ainsi que } x^{\rho_1 - \rho_2} \sim \frac{\rho_1 + 1}{\rho_2 + 1} \frac{L_1(x)}{L_2(x)} .$$

Mais puisque L_1 et $L_2 \in \mathscr{L}$, il vient $\dfrac{\rho_1+1}{\rho_2+1}\dfrac{L_1(x)}{L_2(x)} = x^{o(1)}$, ce qui permet de conclure que $\rho_1 = \rho_2 + o(1)$ c'est-à-dire $\rho_1 = \rho_2$, ce qui implique $R(x) \sim S(x)$ lorsque $x \to \infty$.

Compte tenu de ces observations, on peut considérer que la valeur moyenne régulière, lorsqu'elle existe, d'une fonction arithmétique f est unique. Dans un tel cas, c'est donc sans ambiguïté qu'on désignera sa valeur moyenne régulière par $VM(f)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit* $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$. *Alors:*

(i) la fonction f *possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction* $\hat{f}$ *en possède une;*

(ii) la fonction f *possède une valeur moyenne si et seulement si la fonction* $\tilde{f}$ *en possède une.*

De plus, si l'une ou l'autre de ces valeurs moyennes existe et est régulière, on a

$$VM(f) = 2VM(\hat{f}) = 2VM(\tilde{f})\,. \tag{3.1}$$

Démonstration. Les parties (i) et (ii) ainsi que les égalités (3.1) découlent immédiatement du fait que $\hat{f} = \tilde{f} = \frac{1}{2}f$ pour toute fonction $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$.

THÉORÈME 3.2. *Soit* $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$ *telle que* $f(p) = R(p)$ *pour chaque nombre premier* p, *où* R *est une fonction continûment dérivable à variation régulière non décroissante qui possède la représentation* $R(x) = x^\rho L(x)$, *avec* $\rho \geqslant 0$ *et* $L \in \mathscr{L}$. *Alors la valeur moyenne régulière de la fonction* f *existe si et seulement si celle de la fonction* $\bar{f}$ *existe, auquel cas*

$$VM(f) = 2VM(\bar{f})\,. \tag{3.2}$$

Avant d'entreprendre la démonstration du théorème 3.2, nous établissons d'abord un lemme d'intérêt général qui s'avère crucial pour la démonstration de ce théorème.

LEMME 3.3. *Soit* $\varphi : [1, +\infty[\to \mathbf{R}^+$ *une fonction continue non décroissante telle que* $\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = +\infty$. *Alors*

$$\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt = o(\varphi(x))\,.$$

Démonstration. Soit φ une fonction satisfaisant les hypothèses du lemme. Pour tout x assez grand, on pose

$$y(x) := \inf\{y : \varphi(y) = \sqrt{\varphi(x)}\} .$$

Il est clair que $\lim_{x \to \infty} y(x) = +\infty$.

Puisque φ est non décroissante on a

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt &= \int_1^{y(x)} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt + \int_{y(x)}^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt \leqslant \varphi(y(x)) \int_1^{y(x)} \frac{dt}{t^2} + \varphi(x) \int_{y(x)}^x \frac{dt}{t^2} \\
&= \varphi(y(x)) \left(1 - \frac{1}{y(x)}\right) + \varphi(x) \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}\right) \\
&\leqslant \sqrt{\varphi(x)} \left(1 - \frac{1}{y(x)}\right) + \varphi(x) \left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{x}\right) \\
&< \sqrt{\varphi(x)} + \frac{\varphi(x)}{y(x)} = o(\varphi(x)) ,
\end{aligned}$$

car $\lim_{x \to \infty} y(x) = +\infty$, ce qui complète la preuve du lemme 3.3.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.2. D'abord, puisque $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, il est facile d'établir que

$$\sum_{n \leqslant x} f(n) = \sum_{p \leqslant x} f(p) \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{p \leqslant x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] . \tag{3.3}$$

Par ailleurs, toujours parce que $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, on a

$$\bar{f}(n) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} f(p) = \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} R(p)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leqslant x} \bar{f}(n) &= \sum_{n \leqslant x} \sum_{p^\alpha \| n} \frac{\alpha}{1 + \alpha} R(p) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{\substack{p^\alpha | n \\ \alpha \geqslant 1}} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} - \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) R(p) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \leqslant x} \sum_{p | n} R(p) + \sum_{n \leqslant x} \sum_{\substack{p^\alpha | n \\ \alpha \geqslant 2}} \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)} R(p)
\end{aligned}$$

et donc d'obtenir

$$\sum_{n \leqslant x} \bar{f}(n) = \frac{1}{2} \sum_{p \leqslant x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] + \sum_{\substack{p^\alpha \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)} R(p) \left[\frac{x}{p^\alpha}\right] . \tag{3.4}$$

Considérons d'abord le cas où la fonction $R(x) = x^{\rho} L(x)$ est telle que $\rho = 0$. On a alors

$$(3.5)\qquad \sum_{p \leqslant x} R(p)\left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{p \leqslant x} L(p)\left[\frac{x}{p}\right] = x \sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)}{p} + O\left(\sum_{p \leqslant x} L(p)\right).$$

Or, en utilisant le théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(x) = \dfrac{x}{\log x} + O\left(\dfrac{x}{\log^2 x}\right)$, on a

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)}{p} = \int_2^x \frac{L(t)}{t}\, d\pi(t) = \frac{L(t)}{t}\,\pi(t)\Big|_2^x - \int_2^x \pi(t) \frac{d}{dt}\left(\frac{L(t)}{t}\right) dt$$

$$(3.6)\qquad = \frac{L(x)}{\log x} + O\left(\frac{L(x)}{\log^2 x}\right) + (1 + o(1)) \int_2^x \frac{t}{\log t}\, \frac{L(t)}{t^2} \left(1 - \frac{tL'(t)}{L(t)}\right) dt$$

$$= \frac{L(x)}{\log x} + O\left(\frac{L(x)}{\log^2 x}\right) + (1 + o(1)) \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t} (1 - \eta(t)) dt\,,$$

où $\eta(t) := \dfrac{tL'(t)}{L(t)} \to 0$ lorsque $t \to \infty$, puisque $L \in \mathscr{L}$. Or, étant donné une fonction $M \in \mathscr{L}$, il a été démontré par De Koninck et Mercier ([3], lemme 3) que

$$M(x) = o\left(\int_2^x \frac{M(t)}{t}\, dt\right).$$

En utilisant ce résultat avec $M(x) = \frac{L(x)}{\log x}$, (3.6) devient

$$(3.7)\qquad \sum_{p \leqslant x} \frac{L(p)}{p} = (1 + o(1)) \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t}\, dt\,.$$

Puisque le terme d'erreur $O\left(\sum_{p \leqslant x} L(p)\right)$ qui apparaît dans (3.5) est $o\left(x \displaystyle\int_2^x \frac{L(t)}{t \log t}\, dt\right)$, la relation (3.3) devient

$$(3.8)\qquad \sum_{n \leqslant x} f(n) = (1 + o(1))\, x N(x)\,,$$

où $N(x) := \displaystyle\int_2^x \frac{L(t)}{t \log t}\, dt.$

Par ailleurs il est clair que

$$\sum_{\substack{p^\alpha \leqslant x \\ \alpha \geqslant 2}} \frac{1}{\alpha(\alpha+1)} L(p) \left[\frac{x}{p^\alpha}\right] < x \sum_{\substack{p \\ \alpha \geqslant 2}} \frac{L(p)}{p^\alpha} \ll x \, . \tag{3.9}$$

Enfin, puisque L est non décroissante, on a

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_2^x \frac{L(t)}{t \log t} dt \geqslant L(2) \int_2^x \frac{dt}{t \log t} dt \\ &= L(2) \log\log x + O(1) \to +\infty \text{ lorsque } x \to \infty \, . \end{aligned}$$

En combinant alors (3.3), (3.4), (3.5), (3.8) et (3.9), on obtient le résultat, incluant l'égalité (3.2), dans le cas où $R = L \in \mathscr{L}$.

Il reste à considérer le cas où $R(x) = x^\rho L(x)$, avec $\rho > 0$. Comme $x - 1 < [x] \leqslant x$, on a

$$\frac{1}{2} \sum_{p \leqslant x} R(p) \left(\frac{x}{p} - 1\right) < \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \sum_{p \leqslant x} \frac{R(p)}{p} =: \psi(x)$$

et donc

$$\psi(x) - \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) < \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) \left[\frac{x}{p}\right] \leqslant \psi(x) \, .$$

Or en utilisant les représentations

$$\sum_{p \leqslant x} \frac{R(p)}{p} = \int_2^x \frac{R(t)}{t} d\pi(t) \quad \text{et} \quad \sum_{p \leqslant x} R(p) = \int_2^x R(t) d\pi(t)$$

et en utilisant le théorème des nombres premiers, tout comme on l'a fait dans le cas $R(p) = L(p)$ ci-dessus, on établit que, lorsque $x \to \infty$,

$$\psi(x) \sim \frac{x^\rho}{\rho} \frac{L(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p) \sim \frac{x^\rho}{\rho + 1} \frac{L(x)}{\log x} \, ,$$

de sorte que les trois quantités $\psi(x)$, $\frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p)$ et $\psi(x) - \frac{1}{x} \sum_{p \leqslant x} R(p)$ sont du même ordre de grandeur. Ainsi, compte tenu des relations (3.3) et (3.4), la démonstration sera terminée si l'on peut démontrer que le deuxième terme à droite de (3.4) est $o(x\psi(x))$. Le résultat sera donc démontré si l'on arrive à établir l'implication générale suivante:

$$\begin{aligned} & T(n) \geqslant 0, \quad \varphi(x) \to +\infty, \quad S(x) := \sum_{n \leqslant x} T(n) \sim \varphi(x) \\ & \Rightarrow \sum_{n \leqslant x} \frac{T(n)}{n} = o(\varphi(x)) \, . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Or cette dernière somme peut s'écrire comme suit:

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{T(n)}{n} = \sum_{n \leqslant x} \frac{S(n) - S(n-1)}{n} = \sum_{n \leqslant x} S(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{S([x])}{[x]+1}$$

$$(3.11) \qquad = \sum_{n \leqslant x} \frac{S(n)}{n(n+1)} + o(\varphi(x)) \sim \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + o(\varphi(x)) \,.$$

Ainsi compte tenu de (3.11), l'implication (3.10) est une conséquence immédiate du lemme 3.3. Ceci termine la démonstration du théorème 3.2.

R. L. Duncan a montré (voir [4]) qu'en moyenne, la moyenne de ω sur les diviseurs de n est égale à $\frac{1}{2}\log\log n$. Plus précisément Duncan a démontré qu'il existe une constante c telle que

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \left(\frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} \omega(d)\right) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \bar{\omega}(n) = \frac{1}{2} \log\log x + c + O\left(\frac{1}{\log x}\right) .$$

A cette fin, Duncan a utilisé la relation asymptotique bien connue

$$(3.12) \qquad \sum_{n \leqslant x} \omega(n) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{p \mid n} 1 = \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] = x \log\log x + Cx + O(x/\log x) \,,$$

où $C := \gamma + \sum_p \left(\log(1 - p^{-1}) + \frac{1}{p}\right)$ et γ est la constante d'Euler. Bien plus encore, Duncan a établi l'égalité des ordres normal et moyen de $\bar{\omega}(n)$.

Etant donné $f \in \mathbf{F}$, il est naturel d'examiner le comportement de la suite $\bar{f}, \bar{\bar{f}}, \bar{\bar{\bar{f}}}, \ldots$ Ainsi, pour un entier non négatif m fixé, on considère l'itération $\bar{T}_m$ définie par

$$\bar{T}_m(f) = \bar{T}(\bar{T}_{m-1}(f)) = \ldots = \bar{T}_{m-1}(\overline{T_1}(f)) = \bar{T}_{m-1}(\bar{f})$$

$$\text{où} \quad \bar{T}_1 = \bar{T}, \; \bar{T}_0(f) = f, \quad \text{et où}$$

$$(\bar{T}_m(f))\,(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} (\bar{T}_{m-1}(f))\,(d), n \geqslant 1 \,.$$

Pour simplifier la notation, on désigne par $\bar{f}_m$ l'image de f par $\bar{T}_m$, i.e. $\bar{T}_m(f) = \bar{f}_m$. Nous définissons de même les itérations $\hat{f}_m$ et $\tilde{f}_m$ et obtenons alors par induction sur m, compte tenu des propriétés de $\bar{T}$, $\hat{T}$ et $\tilde{T}$, l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.4. *Soit m un entier non négatif et f une fonction arithmétique. Alors $\bar{T}_m, \hat{T}_m$ et $\tilde{T}_m$ préservent l'additivité et la multi-*

plicativité. En particulier si $f \in \mathscr{A}$ *alors* $\tilde{f}_m(n) = f(n)/2^m$ *et* $\hat{f}_m(n) = f(\delta(n))/2^m$. *Lorsque* $f \in \mathscr{C}\mathscr{A}$, $\bar{f}_m(n) = \tilde{f}_m(n) = f(n)/2^m$. *Enfin si* $f \in \mathscr{F}\mathscr{A}$, $\hat{f}_m(n) = \tilde{f}_m(n) = f(n)/2^m = f(\delta(n))/2^m$.

Afin de généraliser le résultat de Duncan, nous aurons besoin du lemme suivant qui est facile à démontrer.

LEMME 3.5. *Soit* $f \in \mathscr{A}$. *Supposons que* f *est constante sur l'ensemble* $\mathscr{P}$ *des nombres premiers et qu'elle satisfait à* $f(p^r) - f(p^{r-1}) = O(1)$ *uniformément pour* p *premier et* $r \geqslant 2$. *Alors les expressions* $\bar{f}_m(p^r) - \bar{f}_m(p^{r-1})$, $\hat{f}_m(p^r) - \hat{f}_m(p^{r-1})$ *et* $\tilde{f}_m(p^r) - \tilde{f}_m(p^{r-1})$ *sont également bornées uniformément pour* p *premier et* $r \geqslant 2$. *De plus les fonctions* $\bar{f}_m$, $\hat{f}_m$ *et* $\tilde{f}_m$ *sont constantes sur* $\mathscr{P}$.

A chaque fonction g constante sur $\mathscr{P}$, on associe les constantes suivantes

$$c_g := g(2) \quad \text{et} \quad D_g := c_g C + \sum_{r \geqslant 2} \sum_{p} \frac{g(p^r) - g(p^{r-1})}{p^r},$$

où C est la constante de la relation (3.12).

THÉORÈME 3.6. *Soit* f *une fonction additive satisfaisant les hypothèses du lemme 3.5. Alors*

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \bar{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} \log\log x + D_{\bar{f}_m} + O(1/\log x),$$

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \hat{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \omega(n) = \frac{c_f}{2^m} \log\log x + \frac{c_f}{2^m} C + O(1/\log x),$$

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \tilde{f}_m(n) = \frac{c_f}{2^m} \log\log x + \frac{D_f}{2^m} + O(1/\log x).$$

Démonstration. Si $g \in \mathscr{A}$ et est constante sur $\mathscr{P}$, on a

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} g(n) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \sum_{p^r \| n} g(p^r) = x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \sum_{\substack{p^r \mid n \\ r \geqslant 1}} (g(p^r) - g(p^{r-1}))$$

$$= x^{-1} c_g \sum_{p \leqslant x} \left[\frac{x}{p}\right] + x^{-1} \sum_{\substack{p^r \leqslant x \\ r \geqslant 2}} (g(p^r) - g(p^{r-1})) \left[\frac{x}{p^r}\right].$$

Alors la relation (3.12) et le lemme 3.5 permettent d'obtenir les égalités du théorème si on prend soin de remplacer successivement g par $\bar{f}_m$, $\hat{f}_m$ et $\tilde{f}_m$.

EXEMPLE. Si $f(n) = \log \tau(n)$ et $m = 1$, alors

$$x^{-1} \sum_{n \leqslant x} \bar{f}(n) = \frac{\log 2}{2} \log\log x + \frac{\log 2}{2} C$$
$$+ \sum_{r \geqslant 2} \sum_{p} \frac{1}{r(r+1)p^r} \log \left(\frac{(r+1)^r}{r!} \right) + O(1/\log x) .$$

4. MESURE DE L'ÉCART ENTRE f ET LES MOYENNES $\bar{f}$, $\hat{f}$ ET $\tilde{f}$

Nous allons étudier le moment d'ordre deux (selon le sens des définitions des moyennes $\bar{f}$, $\hat{f}$ et $\tilde{f}$) de l'écart entre $\bar{f}(n)$, $\hat{f}(n)$ et $\tilde{f}(n)$ et les valeurs de f sur les diviseurs de n.

Etant donné une fonction arithmétique f, on lui associe les trois opérateurs

$$\bar{\Delta} f(n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} (f(d) - \bar{f}(n))^2 ,$$

$$\hat{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d) (f(d) - \hat{f}(n))^2 ,$$

$$\tilde{\Delta} f(n) := \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} (f(d) - \tilde{f}(n))^2 .$$

Ainsi on remarque que

$$\bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} \{ f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2\bar{f}(n) f(d) \}$$
$$= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 + \bar{f}(n)^2 - 2 \frac{\bar{f}(n)}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)$$
$$= \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2$$

et donc que

$$\bar{\Delta} f(n) = \frac{1}{\tau(n)} \sum_{d \mid n} f(d)^2 - \bar{f}(n)^2 = \overline{f^2}(n) - \bar{f}(n)^2, \tag{4.1}$$

$$\hat{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{d \mid n} \mu^2(d) f(d)^2 - \hat{f}(n)^2 = \widehat{f^2}(n) - \hat{f}(n)^2, \tag{4.2}$$

$$\tilde{\Delta} f(n) = \frac{1}{2^{\omega(n)}} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d, n/d) = 1}} f(d)^2 - \tilde{f}(n)^2 = \widetilde{f^2}(n) - \tilde{f}(n)^2. \tag{4.3}$$