Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 42 (1996)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CONJECTURE abc
Autor: Nitaj, Abderrahmane
Kapitel: 5. GÉNÉRALISATIONS
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-87869

Preuve. Soient $k > 0$ et $k_1 > 0$. Supposons que tous les triplets (a, b, c) d'entiers positifs avec $a + b = c$ et $(a, b) = 1$ vérifient $c \leqslant kr(abc)\,(\log r(abc))^{k_1}$. Soit (a, b, c) un triplet vérifiant l'inégalité du théorème (4.6). Alors:

$$r(abc)\exp\left((4-\delta)\,\frac{\sqrt{\log r(abc)}}{\log\log r(abc)}\right) < c \leqslant kr(abc)\,(\log r(abc))^{k_1}\,,$$

ce qui donne:

$$(4-\delta)\sqrt{\log r(abc)} < (\log k + k_1 \log\log r(abc))\log\log r(abc)\,,$$

et donc $r(abc)$ est borné, ce qui est impossible par le théorème (4.6) et par le théorème de Mahler. □

La proposition 4.7 nous donne maintenant le résultat suivant:

PROPOSITION 4.8. *Pour tout* $k > 0$, *il existe un réel* $\varepsilon > 0$ *et un triplet* (a, b, c) *d'entiers positifs, vérifiant* $a + b = c$ *et* $(a, b) = 1$, *tels que*

$$c > \frac{1}{\varepsilon^k}\,(r(abc))^{1+\varepsilon}\,.$$

Preuve. Soit $k > 0$. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, et tout triplet (a, b, c) d'entiers positifs vérifiant $a + b = c, (a, b) = 1$ on ait:

$$c \leqslant \frac{1}{\varepsilon^k}\,(r(abc))^{1+\varepsilon}\,.$$

Le minimum du second membre de cette inégalité est atteint pour $\varepsilon = k/\log r(abc)$. Alors, on doit avoir:

$$c \leqslant \left(\frac{e}{k}\right)^k r(abc)\,(\log r(abc))^k\,,$$

ce qui contredit la proposition 4.7. □

5. GÉNÉRALISATIONS

La conjecture *abc* est aussi simple par son énoncé que le théorème de Fermat, mais certainement beaucoup plus difficile, et en tout cas sa résolution aura beaucoup de conséquences en théorie des nombres. L'intérêt de cette conjecture nous ramène à envisager la possibilité d'une généralisation dans différentes directions.

5.1. n-CONJECTURE *abc*

La conjecture *abc* peut être étendue à un nombre de paramètres supérieur à trois de la façon suivante.

Soit $n \geqslant 3$. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des entiers vérifiant les conditions:

$$(5.1.1) \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0, \\ (a_1, a_2, \cdots, a_n) = 1, \\ \text{Aucune sous-somme n'est nulle.} \end{cases}$$

Soit $r(a_1 a_2 \cdots a_n)$ le radical du produit $a_1 a_2 \cdots a_n$. La n-conjecture *abc* s'énonce ainsi (voir [2]):

CONJECTURE 5.1.2. (n-conjecture *abc*). *Pour tout entier* $n \geqslant 3$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une constante* $c(\varepsilon, n) > 0$ *telle que pour tout n-uplet* $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ *d'entiers vérifiant les conditions (5.1.1) on ait:*

$$\max(|a_1|, \cdots, |a_n|) \leqslant c(\varepsilon, n)\,(r(a_1 a_2 \cdots a_n))^{2n-5+\varepsilon} .$$

5.2. L'ANNEAU DES POLYNÔMES

L'analogue de la conjecture *abc* dans l'anneau des polynômes $K[X]$ d'un corps K de caractéristique nulle est en fait un théorème. On peut trouver sa démonstration dans [10], [17] ou [20].

THÉORÈME 5.2.1. (Mason). *Soient* A, B *et* C *trois polynômes non tous constants de* $K[X]$, *vérifiant* $A + B + C = 0$ *et* $(A, B) = 1$. *Soit* $r(ABC)$ *la somme des degrés des différents facteurs irréductibles de* ABC. *Alors*

$$\max(\deg(A), \deg(B), \deg(C)) \leqslant r(ABC) - 1 .$$

L'inégalité du théorème ci-dessus ne peut pas être améliorée (voir [12]). D'autre part, ce théorème est très utile pour l'étude des équations polynomiales. En particulier il implique le théorème de Fermat dans $K[X]$ et explique pourquoi on ne peut pas espérer trouver des formules polynomiales donnant un grand nombre de bons exemples pour la conjecture *abc*.

La n-conjecture *abc* dans $K[X]$, où K est un corps de caractéristique nulle, peut être formulée aussi de la façon suivante (voir [2]).

CONJECTURE 5.2.2. *Soient* $n \geqslant 3$ *un entier et* a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ *des polynômes non tous constants de* $K[X]$ *vérifiant des conditions analogues aux conditions (5.1.1). Alors*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \deg(a_i) \leqslant (2n-5)\left(r(a_1 \cdots a_n) - 1\right),$$

où $r(a_1 \cdots a_n)$ *désigne la somme des degrés des différents facteurs irréductibles de* $a_1 \cdots a_n$.

5.3. CORPS DE NOMBRES

La conjecture *abc* existe aussi dans les corps de nombres. Le lecteur intéressé peut trouver sa formulation par exemple dans [4], [5] ou [35].

RÉFÉRENCES

[1] BOMBIERI, E. The Mordell Conjecture Revisited. *Annali Scuola Normale Sup. Pisa, Cl. Sci., S. IV, 17* (1990), 615-640.

[2] BROWKIN, J. and J. BRZEZIŃSKI. Some remarks on the *abc*-conjecture. *Math. Comp. 62,* N° 206 (1994), 931-939.

[3] DARMON, H. and A. GRANVILLE. On the equation $z^m = F(x,y)$ and $Ax^p + By^q = Cz^r$. *Bull. London Math. Soc. 27* (1995), 513-514.

[4] ELKIES, N.D. *ABC* implies Mordell. *Intern. Math. Res. Notices 7* (1991), 99-109, in: *Duke Math. Journ. 64* (1991).

[5] FREY, G. Links between solutions of $A - B = C$ and elliptic curves. *Number Theory, Ulm 1987* (H.P. Schlickewei, E. Wirsing, eds.) Springer Lecture Notes in Math. 1380, 31-62.

[6] GUY, R.K. *Unsolved Problems in Number Theory.* Second edition. Springer Verlag, 1994.

[7] HALL, M., Jr. The diophantine equation $x^3 - y^2 = k$. *Computers in Number Theory* (A.O.L. Atkin, B.J. Birch, eds.) Academic Press, London 1971, 173-198.

[8] HARDY, K., J.B. MUSKAT and K.S. WILLIAMS. A deterministic algorithm for solving $n = fu^2 + gv^2$ in coprime integers u and v. *Math. Comp. 55, N° 191* (1990), 327-343.

[9] HELLEGOUARCH, Y. *Courbes elliptiques et équation de Fermat.* Thèse, Université de Besançon, 1972.

[10] LANG, S. Old and new conjectured diophantine inequalities. *Bull. Amer. Math. Soc. 23* (1990), 37-75.