Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 41 (1995)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ POUR LES SURFACES MINIMALES DE E^3

Autor: Burlet, Oscar / Haab, François

Anhang: Annexe I

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61823

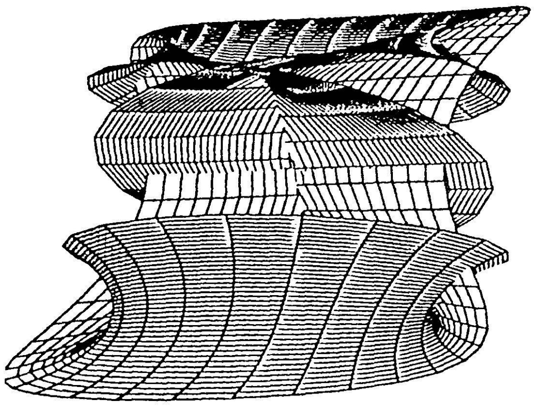

FIGURE 4

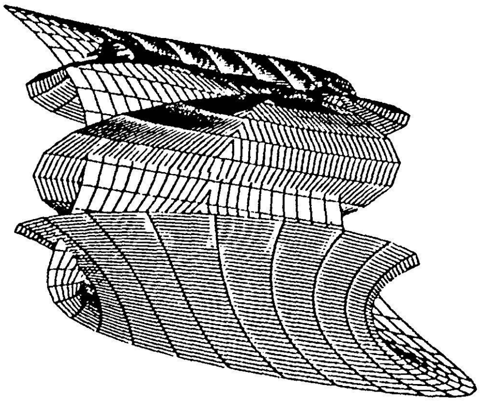

FIGURE 5

ANNEXE I

Nous allons démontrer ici la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Soit* M *une surface orientée et* f, f^* *deux immersions isométriques dans* E^3 *dont les applications de Gauss coïncident. Si en chaque point* $p \in M$ *la courbure moyenne de* f *ou de* f^* *est non nulle, les deux immersions* f *et* f^* *sont congruentes.*

Preuve. Rappelons qu'en chaque point $p \in M$ nous avons les formes fondamentales suivantes, définies sur $T_p M$:

$$I_p(\xi, \eta) = < T_p f(\xi), T_p f(\eta) >$$
$$II_p(\xi, \eta) = - < T_p G(\xi), T_p f(\eta) >$$
$$III_p(\xi, \eta) = < T_p G(\xi), T_p G(\eta) >$$

Rappelons brièvement que courbure moyenne et courbure de Gauss en p sont reliées à G et à f par les formules

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(T_p G \circ (T_p f)^{-1})$$
$$K(p) = \det(T_p G \circ (T_p f)^{-1}) .$$

L'application $T_p G \circ (T_p f)^{-1}$ est un endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel $G(p)^{\perp} = T_p f(T_p M), H(p)$ est la courbure moyenne de f en p et $K(p)$ sa courbure de Gauss en p. Les formes fondamentales de f en p vérifient l'identité

$$III_p(\xi, \eta) + 2H(p) II_p(\xi, \eta) + K(p) I_p(\xi, \eta) = 0 .$$

Notons $I_p^*, II_p^*, III_p^*, H^*, G^*, K^*$ les objets analogues définis pour f^*.

Comme f et f^* sont des immersions isométriques nous avons $I_p = I_p^*$ et $K = K^*$, et comme $G = G^*$ nous avons aussi $III_p = III_p^*$ pour tout $p \in M$. Les endomorphismes $A_p = T_p G \circ (T_p f)^{-1}$ et $A_p^* = T_p G^* \circ (T_p f^*)^{-1}$ sont auto-adjoints et sont donc représentés par des matrices symétriques dans une base orthonormée de $G(p)^{\perp}$. Nous pouvons écrire $A_p^* \circ R_p = A_p$ où $R_p = T_p f^* \circ (T_p f)^{-1}$ est une rotation, vu que f et f^* sont des isométries avec même application de Gauss. Soit θ_p son angle de rotation avec $-\pi < \theta_p \leqslant \pi$. Par symétrie de A et A^* nous avons

$$\mathrm{Tr}(A^*R) = \mathrm{Tr}A^* \cos\theta = \mathrm{Tr}A \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(AR^{-1}) = \mathrm{Tr}A \, cos\theta = \mathrm{Tr}A^*$$

D'où les formules

$$H^* \cos\theta = H \quad \text{et} \quad H \cos\theta = H^*$$

Nous en déduisons que $H^* = \cos^2(\theta) H^*$ et $H = \cos^2(\theta) H$, et avec nos hypothèses, H ou H^* non nuls en chaque point, nous pouvons conclure que $\theta_p = 0$ ou $\theta_p = \pi$, pour tout p. Par connexité de M la fonction $p \mapsto \theta_p$ est constante, égale à 0 ou π. En remplaçant éventuellement f^* par $-f^*$, ce qui ne change pas la classe de congruence de f^*, nous pouvons supposer $\theta_p = 0$ pour tout p. Ainsi $H = H^*$. Alors les identités entre les formes fondamentales et le fait que H soit partout non nulle, impliquent l'égalité des deuxièmes formes fondamentales $II = II^*$. Tenant compte du fait que $G = G^*$, la théorie locale des surfaces montre alors que $f^* = \tau \circ f$ où τ est une translation de E^3. En fait l'application $p \mapsto (f^*(p) - f(p))$ est localement constante donc constante par connexité de M. En d'autres termes f est congruente à f^*. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alexandroff, A. Über eine Klasse geschlossener Flächen. *Recueil Math.* (devenu *Math. Sbornik 4* (1938), 69-77.

[2] do Carmo, M.P. *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[3] Choi, H.I., W.H. Meeks and B. White. A rigidity theorem for properly embedded minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$. *J. Differential geometry, 32* (1990), 65-76.

[4] Cohn-Vossen, S. Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. *Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen,* 1927, 125-134.

[5] Collin, P. Topologie et courbure des surfaces minimales de $\mathbf{R}^3$. Preprint 124 ENS Lyon 1994.

[6] Connelly, R. *Rigidity.* Handbook of Convex Geometry, Vol. A, North-Holland, Amsterdam 1993, pp. 223-271.