

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ POUR LES SURFACES MINIMALES DE  $E^3$   
**Autor:** Burlet, Oscar / Haab, François  
**Anhang:** Annexe I  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61823>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.05.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

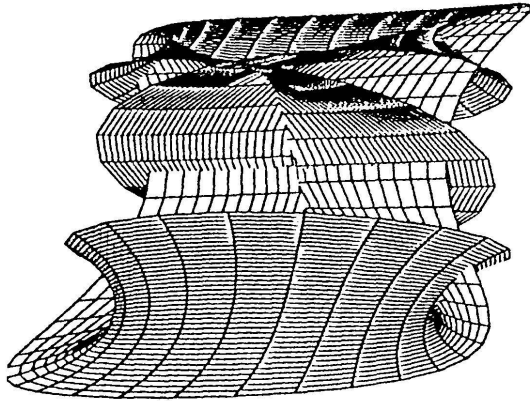


FIGURE 4

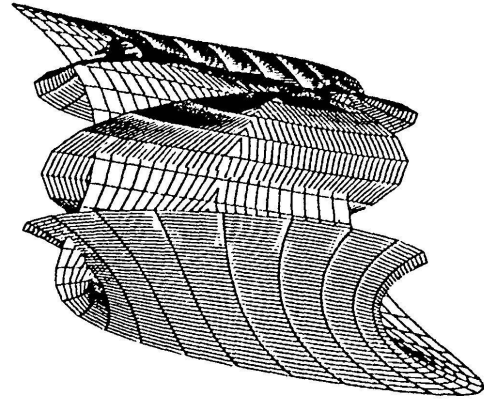


FIGURE 5

## ANNEXE I

Nous allons démontrer ici la proposition suivante:

**PROPOSITION 2.** *Soit  $M$  une surface orientée et  $f, f^*$  deux immersions isométriques dans  $E^3$  dont les applications de Gauss coïncident. Si en chaque point  $p \in M$  la courbure moyenne de  $f$  ou de  $f^*$  est non nulle, les deux immersions  $f$  et  $f^*$  sont congruentes.*

*Preuve.* Rappelons qu'en chaque point  $p \in M$  nous avons les formes fondamentales suivantes, définies sur  $T_p M$ :

$$I_p(\xi, \eta) = \langle T_p f(\xi), T_p f(\eta) \rangle$$

$$II_p(\xi, \eta) = - \langle T_p G(\xi), T_p f(\eta) \rangle$$

$$III_p(\xi, \eta) = \langle T_p G(\xi), T_p G(\eta) \rangle$$

Rappelons brièvement que courbure moyenne et courbure de Gauss en  $p$  sont reliées à  $G$  et à  $f$  par les formules

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr}(T_p G \circ (T_p f)^{-1})$$

$$K(p) = \det(T_p G \circ (T_p f)^{-1}).$$

L'application  $T_p G \circ (T_p f)^{-1}$  est un endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel  $G(p)^\perp = T_p f(T_p M)$ ,  $H(p)$  est la courbure moyenne de  $f$  en  $p$  et  $K(p)$  sa courbure de Gauss en  $p$ . Les formes fondamentales de  $f$  en  $p$  vérifient l'identité

$$III_p(\xi, \eta) + 2H(p)II_p(\xi, \eta) + K(p)I_p(\xi, \eta) = 0.$$

Notons  $I_p^*, II_p^*, III_p^*, H^*, G^*, K^*$  les objets analogues définis pour  $f^*$ .

Comme  $f$  et  $f^*$  sont des immersions isométriques nous avons  $I_p = I_p^*$  et  $K = K^*$ , et comme  $G = G^*$  nous avons aussi  $III_p = III_p^*$  pour tout  $p \in M$ . Les endomorphismes  $A_p = T_p G \circ (T_p f)^{-1}$  et  $A_p^* = T_p G^* \circ (T_p f^*)^{-1}$  sont auto-adjoints et sont donc représentés par des matrices symétriques dans une base orthonormée de  $G(p)^\perp$ . Nous pouvons écrire  $A_p^* \circ R_p = A_p$  où  $R_p = T_p f^* \circ (T_p f)^{-1}$  est une rotation, vu que  $f$  et  $f^*$  sont des isométries avec même application de Gauss. Soit  $\theta_p$  son angle de rotation avec  $-\pi < \theta_p \leq \pi$ . Par symétrie de  $A$  et  $A^*$  nous avons

$$\text{Tr}(A^* R) = \text{Tr} A^* \cos \theta = \text{Tr} A \quad \text{et} \quad \text{Tr}(A R^{-1}) = \text{Tr} A \cos \theta = \text{Tr} A^*$$

D'où les formules

$$H^* \cos \theta = H \quad \text{et} \quad H \cos \theta = H^*$$

Nous en déduisons que  $H^* = \cos^2(\theta) H^*$  et  $H = \cos^2(\theta) H$ , et avec nos hypothèses,  $H$  ou  $H^*$  non nuls en chaque point, nous pouvons conclure que  $\theta_p = 0$  ou  $\theta_p = \pi$ , pour tout  $p$ . Par connexité de  $M$  la fonction  $p \mapsto \theta_p$  est constante, égale à 0 ou  $\pi$ . En remplaçant éventuellement  $f^*$  par  $-f^*$ , ce qui ne change pas la classe de congruence de  $f^*$ , nous pouvons supposer  $\theta_p = 0$  pour tout  $p$ . Ainsi  $H = H^*$ . Alors les identités entre les formes fondamentales et le fait que  $H$  soit partout non nulle, impliquent l'égalité des deuxièmes formes fondamentales  $II = II^*$ . Tenant compte du fait que  $G = G^*$ , la théorie locale des surfaces montre alors que  $f^* = \tau \circ f$  où  $\tau$  est une translation de  $E^3$ . En fait l'application  $p \mapsto (f^*(p) - f(p))$  est localement constante donc constante par connexité de  $M$ . En d'autres termes  $f$  est congruente à  $f^*$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALEXANDROFF, A. Über eine Klasse geschlossener Flächen. *Recueil Math.* (devenu *Math. Sbornik* 4 (1938), 69-77.
- [2] DO CARMO, M.P. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [3] CHOI, H.I., W.H. MEEKS and B. WHITE. A rigidity theorem for properly embedded minimal surfaces in  $\mathbf{R}^3$ . *J. Differential geometry*, 32 (1990), 65-76.
- [4] COHN-VOSSEN, S. Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen. *Nachrichten Ges. Wiss. Göttingen*, 1927, 125-134.
- [5] COLLIN, P. Topologie et courbure des surfaces minimales de  $\mathbf{R}^3$ . Preprint 124 ENS Lyon 1994.
- [6] CONNELLY, R. *Rigidity*. Handbook of Convex Geometry, Vol. A, North-Holland, Amsterdam 1993, pp. 223-271.