

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 41 (1995)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UN THÉORÈME DE RIGIDITÉ POUR LES SURFACES MINIMALES DE  $E^3$   
**Autor:** Burlet, Oscar / Haab, François  
**Kapitel:** 4. Exemples  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61823>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Mais le chemin  $\pi_z \circ f \circ \gamma$  est précisément une paramétrisation d'une composante du contour apparent et par le choix de  $z$  nous pouvons affirmer que

$$\langle \star df(\gamma(t); \gamma'(t)), z \rangle = \rho(t) = (-1)^i \| (\pi_z \circ f \circ \gamma)'(t) \| \\ \forall t \in [t_i, t_{i+1}] .$$

Cette égalité reste vraie en un point cuspidal où les deux membres valent zéro. Par définition de la longueur algébrique de  $\pi_z \circ f \circ \gamma$  nous avons alors

$$\int_{\gamma} \star df = \sum_{i=1}^n (-1)^i l(\pi_z \circ f \circ \gamma | [t_i, t_{i+1}]) . \quad \square$$

Observons que  $n$  est toujours pair et que par convention nous avons noté  $l(\pi_z \circ f \circ \gamma | [t_n, t_{n+1}])$  la somme de longueurs  $l(\pi_z \circ f \circ \gamma | [a, t_1]) + l(\pi_z \circ f \circ \gamma | [t_n, b])$ .

De ces considérations il résulte immédiatement que si pour un  $z \in \mathcal{S}^2$  avec  $\pi_z \circ f$  générique, l'ensemble singulier  $\Sigma_z$  possède une composante connexe sans points cuspidaux, l'immersion  $f$  est minimalement rigide.

#### 4. EXEMPLES

##### *Exemple 1. Non rigidité des caténoïdes.*

Rappelons que les caténoïdes sont les seules surfaces de révolution minimales et complètes, voir Hildebrandt [8]. Ils sont obtenus par rotation d'une chaînette autour d'un axe. Si nous prenons pour axe de rotation l'axe des  $z$ , les caténoïdes sont tous engendrés par la rotation des chaînettes  $x = a \operatorname{ch} \left( \frac{z - z_0}{a} \right)$  contenues dans le plan  $0_{xz}$ . Chaque caténoïde peut, après translation, être paramétré par

$$X_a(s, u) = (a \operatorname{ch} u \cos s, a \operatorname{ch} u \sin s, au) .$$

Le changement de paramètre  $(s, v) = (s, \operatorname{sh} u)$  définit une nouvelle paramétrisation

$$Y_a(s, v) = (a \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} v) \cos s, a \operatorname{ch}(\operatorname{argsh} v) \sin s, a \operatorname{argsh} v)$$

et dans cette paramétrisation les coefficients de la première forme fondamentale sont  $g_{11} = a^2(1 + v^2)$ ,  $g_{12} = 0$  et  $g_{22} = a^2$ .

Construisons maintenant une surface réglée de  $E^3$  isométrique et non congruente au caténoïde.

Il existe [13] des courbes fermées de  $E^3$  de longueur arbitraire, de courbure non nulle dont la torsion est constante et égale à un. Montrons que l'image par une homothétie de  $E^3$  de rapport  $a$  de la «surface» des binormales d'une telle courbe  $\gamma$  de longueur  $2\pi$  définit une immersion de l'anneau  $\mathbf{R}^2/(s, v) \sim (s + 2\pi, v)$  dans  $E^3$  qui est isométrique au caténoïde (comme surface paramétrisée). L'immersion dont l'image est la «surface» des binormales est donnée par

$$Z_a(s, v) = a(\gamma(s) + vb(s)) ,$$

$s$  étant l'abscisse curviligne de  $\gamma$  et  $b(s)$  désignant la binormale à  $\gamma$  en  $\gamma(s)$ . Les coefficients de la première forme fondamentale sont  $g_{11} = a^2(1 + v^2)$ ,  $g_{12} = 0$  et  $g_{22} = a^2$ .

Ainsi, les deux immersions  $Y_a$  et  $Z_a$ , que nous venons de construire, induisent la même métrique riemannienne sur l'anneau  $\mathbf{R}^2/(s, v) \sim (s + 2\pi, v)$ , à partir de la métrique euclidienne de  $E^3$ . Cela signifie que  $Y_a$  et  $Z_a$  sont des immersions isométriques de l'anneau muni de cette métrique induite. Un calcul direct montre que la courbure moyenne de  $Z_a$  égale  $H(s, v) = |\ddot{\gamma}(s)|/a\sqrt{1 + v^2}$ . Comme  $\gamma$  est de courbure non nulle, l'immersion  $Z_a$  n'est pas minimale et ne saurait donc être congruente à  $Y_a$ .

*Exemple 2. Surface minimale immergée, complète, non simplement connexe et non minimalement rigide.*

Nous considérons, dans ce qui suit, des immersions dans  $E^3$ , d'un domaine simplement connexe  $D \subset \mathbf{C}$ . Il est alors sous-entendu que  $D$  est muni de la métrique riemannienne induite par cette immersion à partir de la métrique euclidienne de  $E^3$ , de sorte que cette immersion est toujours une isométrie. Soient  $f$  et  $g$  des fonctions, avec  $g$  méromorphe non identiquement nulle et  $f$  holomorphe non nulle excepté aux pôles de  $g$ , où l'ordre du zéro de  $f$  égale l'ordre du pôle de  $g^2$ . Alors pour toute paire de telles fonctions, la représentation de Weierstrass fournit une immersion isométrique minimale de  $D$  dans  $E^3$ , donnée par la formule

$$X(w) = \operatorname{Re} \int_{w_0}^w \Phi(z) dz$$

où  $\Phi: D \rightarrow \mathbf{C}^3$  est l'application  $\Phi = \left(\frac{1}{2}f(1 - g^2), \frac{i}{2}f(1 + g^2), fg\right)$  et l'intégrale est effectuée sur un chemin quelconque joignant  $w_0$  à  $w$ .

L'immersion adjointe  $X^*$  de  $X$  est la partie imaginaire de l'application  $\alpha$  de  $D$  dans  $\mathbf{C}^3$ , définie par

$$\alpha(w) = \int_{w_0}^w \Phi(z) dz .$$

L'immersion  $X^*$  induit dans  $D$  la même métrique riemannienne que  $X$ , de plus elle est minimale. Plus généralement pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , l'application

$$Z_\theta(w) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} \alpha(w)) = \cos \theta X(w) + \sin \theta X^*(w)$$

fournit une immersion qui induit dans  $D$  la même métrique riemannienne que  $X$  et qui est minimale. Explicitement cette métrique dans  $D$  est donnée par

$$ds^2 = \frac{1}{2} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 |dz|^2 .$$

La fonction méromorphe  $g: D \rightarrow \bar{\mathbf{C}}$  égale la projection stéréographique de l'application de Gauss associée à  $Z_\theta$ , elle est donc indépendante de  $\theta$ . La courbure de Gauss est donnée par

$$K = - \left( \frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right)^2 .$$

Construisons maintenant un exemple de surface minimale immergée, complète, non simplement connexe et non minimalement rigide. Prenons  $D = \mathbf{C}$ ,  $g(z) = -ie^{iaz}$  et  $f(z) = -ie^{i(b-a)z}$ , avec  $a, b \in \mathbf{Z}$  et  $|a| > |b| > 0$ . Les immersions minimales associées sont données par

$$Z_\theta(u, v) = \left\{ (b \operatorname{ch} av + a \operatorname{sh} av) \frac{\cos(bu - \theta)}{(a^2 - b^2)} \begin{pmatrix} \cos au \\ \sin au \\ 0 \end{pmatrix} + (a \operatorname{ch} av + b \operatorname{sh} av) \frac{\sin(bu - \theta)}{(a^2 - b^2)} \begin{pmatrix} \sin au \\ -\cos au \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{b} \sin(bu - \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{bv} .$$

Les immersions minimales  $Z_\theta(u, v): \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , définissent des immersions isométriques minimales  $\hat{Z}_\theta$  de l'anneau  $\mathbf{R}^2 / (u, v) \sim (u + 2k\pi, v)$  dans  $E^3$  non congruentes entre elles. Ces immersions isométriques ne possèdent pas de points singuliers car  $\mathbf{C}$  est muni de la métrique induite

$$ds^2 = \frac{1}{2} (1 + e^{-2av})^2 e^{2(a-b)v} > 0 .$$

Observons que  $\mathbf{C}$  muni de cette métrique est complet car

$$ds^2(u + iv) = \frac{1}{2} (e^{2(a-b)v} + 2e^{-bv} + e^{(-a-b)v}) (du^2 + dv^2)$$

tend vers  $+\infty$  si  $v \rightarrow \pm\infty$  vu que  $|a| > |b| > 0$ . Finalement la courbure totale de  $\hat{Z}_\theta$  est égale à  $4a\pi$  car l'application  $\hat{g}$ , composée de l'application de Gauss et de la projection stéréographique est égale à  $g(u, v) = e^{-av}(\sin au, -\cos au)$ .

Nous avons donc construit une immersion isométrique minimale  $X$  sans points singuliers d'un anneau complet de courbure totale  $-4a\pi$ ,  $a \geq 2$ , qui n'est pas minimalement rigide. On peut observer que  $X$  possède un bout planaire et un bout de type Enneper. Les figures ci-après représentent différentes étapes de la déformation isométrique de l'immersion minimale  $X$  en l'immersion isométrique minimale adjointe  $X^*$ . La figure 1 représente la trace du domaine  $\{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 1\}$ . Les figures 2 à 5 représentent la trace du domaine précédent par les immersions isométriques  $Z_\theta$  avec  $\theta = \pi/8, \pi/4, 3\pi/8, \pi/2$ . Toutes ces surfaces sont vues depuis une direction parallèle à  $(-1, -2, -1)$ .

FIGURE 1

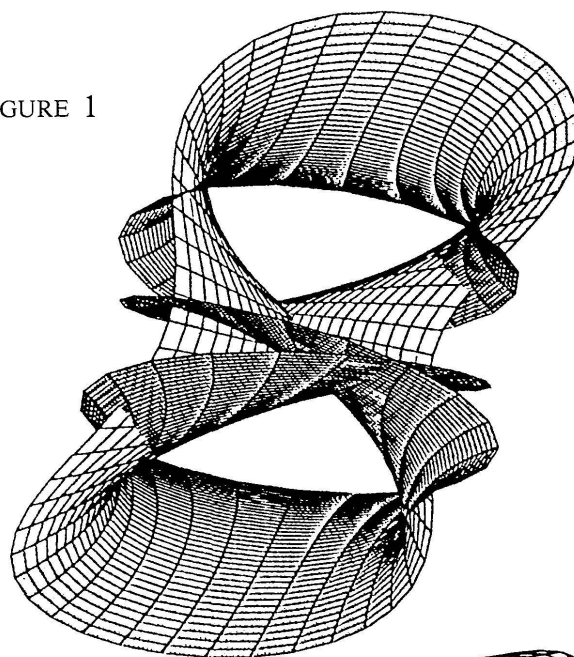


FIGURE 2

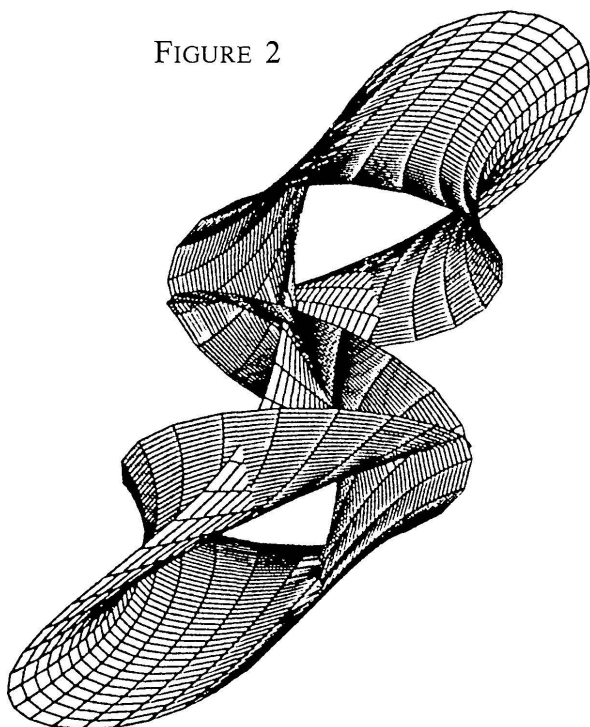
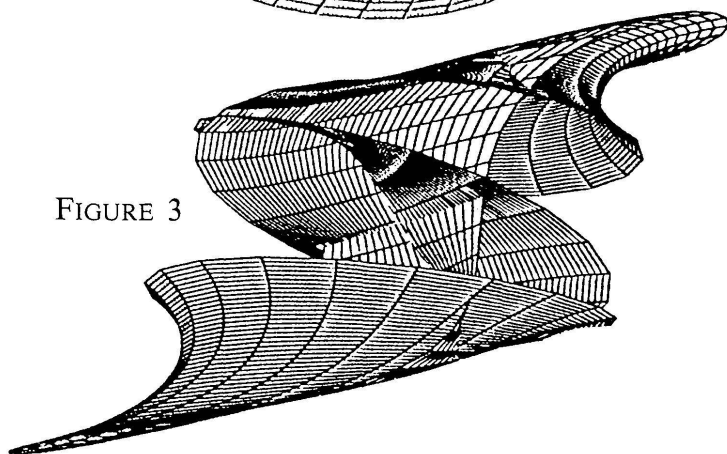


FIGURE 3



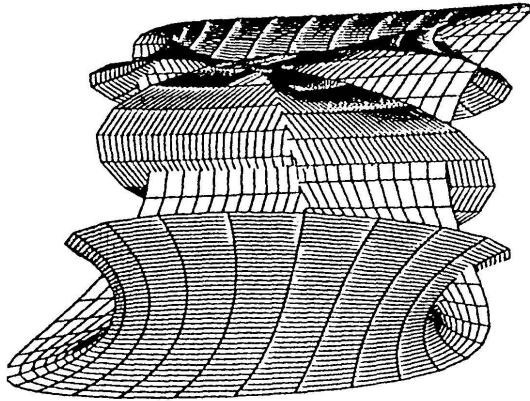


FIGURE 4

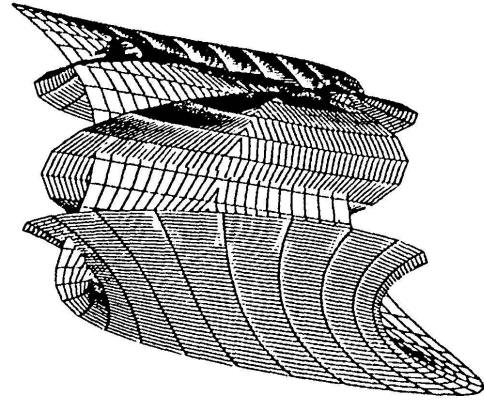


FIGURE 5

## ANNEXE I

Nous allons démontrer ici la proposition suivante:

**PROPOSITION 2.** *Soit  $M$  une surface orientée et  $f, f^*$  deux immersions isométriques dans  $E^3$  dont les applications de Gauss coïncident. Si en chaque point  $p \in M$  la courbure moyenne de  $f$  ou de  $f^*$  est non nulle, les deux immersions  $f$  et  $f^*$  sont congruentes.*

*Preuve.* Rappelons qu'en chaque point  $p \in M$  nous avons les formes fondamentales suivantes, définies sur  $T_p M$ :

$$I_p(\xi, \eta) = \langle T_p f(\xi), T_p f(\eta) \rangle$$

$$II_p(\xi, \eta) = - \langle T_p G(\xi), T_p f(\eta) \rangle$$

$$III_p(\xi, \eta) = \langle T_p G(\xi), T_p G(\eta) \rangle$$

Rappelons brièvement que courbure moyenne et courbure de Gauss en  $p$  sont reliées à  $G$  et à  $f$  par les formules

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{Tr}(T_p G \circ (T_p f)^{-1})$$

$$K(p) = \det(T_p G \circ (T_p f)^{-1}).$$

L'application  $T_p G \circ (T_p f)^{-1}$  est un endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel  $G(p)^\perp = T_p f(T_p M)$ ,  $H(p)$  est la courbure moyenne de  $f$  en  $p$  et  $K(p)$  sa courbure de Gauss en  $p$ . Les formes fondamentales de  $f$  en  $p$  vérifient l'identité

$$III_p(\xi, \eta) + 2H(p)II_p(\xi, \eta) + K(p)I_p(\xi, \eta) = 0.$$

Notons  $I_p^*, II_p^*, III_p^*, H^*, G^*, K^*$  les objets analogues définis pour  $f^*$ .