Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 41 (1995)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE CARACTÉRISATION DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE
Autor: d'ALMEIDA, Jean
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-61821

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 41 (1995), p. 135-139

UNE CARACTÉRISATION DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE

par Jean d'ALMEIDA

INTRODUCTION

On considère une droite L du plan projectif complexe P^2. Si on fixe n points $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sur L, il est possible de trouver une courbe algébrique de degré n passant par les points P_i. Il suffit de prendre une réunion de droites. Il est également facile de trouver une courbe passant par les points P_i et ayant en chacun de ces points une tangente fixée d'avance. Si l'on impose des conditions du second ordre alors il existe une condition (nécessaire et suffisante) pour l'existence de la courbe algébrique.

Supposons que $f(x, y)$ soit une équation affine de C, L la droite d'équation $x = 0$ et que les points d'intersection de C et L soient à distance finie sur l'axe des y.

On a alors la relation de Reiss:

$$\sum \frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3} = 0 ,$$

la somme étant étendue aux points d'intersection ([GH], p. 675).

Soit I l'idéal définissant la droite L dans P^2 et $\mathscr{O}_\mu = \mathscr{O} / I^{\mu+1}$ le faisceau structural du μ-ième voisinage infinitésimal $L(\mu) = (L, \mathscr{O}_\mu)$. La donnée d'éléments d'arc d'ordre μ est équivalente à la donnée d'un faisceau inversible $\mathscr{L}_{(\mu)}$ sur $L_{(\mu)}$ et d'une section $\sigma_{(\mu)} \in H^0(\mathscr{L}_{(\mu)})$.

On peut alors montrer qu'on a une surjection $\operatorname{Pic} P^2 \to \operatorname{Pic} L(1)$ où Pic désigne le groupe de Picard mais on a une suite exacte

$$0 \to \operatorname{Pic} P^2 \to \operatorname{Pic} L(2) \to \mathbf{C} \to 0 .$$

Il y a donc une condition pour que $\mathscr{L}(2) \in \operatorname{Pic} L(2)$ soit la restriction d'un faisceau inversible $\mathscr{L} \in \operatorname{Pic} P^2$. C'est la relation de Reiss ([GH], p. 698).

On s'intéresse au problème analogue en remplaçant P^2 par une surface projective lisse et L par un diviseur D. On montrera que l'obstruction existe dès le premier ordre. Il existe donc dès le premier ordre des analogues de la relation de Reiss pour toute surface autre que P^2.

PROPOSITION 1. *Soit S une surface projective lisse sur $\mathbf{C}$ et D une courbe lisse irréductible. On suppose que le diviseur $2D$ est très ample. Soit $D(1)$ le premier voisinage infinitésimal de $D, D(1) = (D, \mathscr{O}_S/I^2)$ où I est le faisceau définissant D dans S. Le morphisme de restriction* $\operatorname{Pic} S \to \operatorname{Pic} D(1)$ *est surjectif si et seulement si S est le plan projectif et D une droite.*

Démonstration. On considère la suite exacte $0 \to 1 + I^2 \to \mathscr{O}_S^* \to \mathscr{O}_{D(1)}^* \to 0$ où $1 + I^2$ désigne le faisceau multiplicatif des fonctions $1 + f$ où f s'annule à l'ordre deux le long de D. On a $1 + I^2 \simeq I^2$ ([GH], p. 699). On en déduit la suite exacte $\operatorname{Pic} S \xrightarrow{a} \operatorname{Pic} D(1) \to H^2(I) \xrightarrow{b} H^2(\mathscr{O}_S^*) \to 0$. L'obstruction au relèvement d'un faisceau inversible $\mathscr{L}(1) \in \operatorname{Pic} D(1)$ est donc dans le conoyau du morphisme a c'est-à-dire dans le noyau du morphisme b. Le morphisme b se factorise à travers la flèche naturelle $H^2(I^2) \to H^2(\mathscr{O}_S)$.

Il en résulte que $\operatorname{Ker} b$ contient

$$\operatorname{Ker}(H^2(I^2) \to H^2(\mathscr{O}_S)) .$$

Si ce dernier espace est non nul on a une obstruction au relèvement. S'il est nul, alors la suite exacte $0 \to I^2 \to \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_{D(1)} \to 0$ montre que $H^2(I^2) \simeq H^2(\mathscr{O}_S)$. Par dualité de Serre, on a donc $H^0(\mathscr{O}_S(2D+K_S)) = H^0(K_S)$ où K_S est le diviseur canonique de S. On en déduit facilement que le faisceau $\mathscr{O}_S(2D + K_S)$ n'est pas engendré par ses sections globales. D'après [S] ou [V], si H est un fibré en droites très ample sur une surface projective lisse complexe S tel que $H + K_S$ ne soit pas engendré par ses sections globales alors on a deux possibilités:

i) $H = \mathscr{O}(1)$ ou $\mathscr{O}(2)$ sur P^2;

ii) H est un fibré sur une surface géométriquement réglée et la restriction de H à chaque fibre de la surface est de degré 1.

Dans notre situation $H = \mathscr{O}_S(2D)$. Le cas où S est géométriquement réglée est donc exclu.

Dans le cas où $S = P^2$ on a $H^2(\mathscr{O}_{p^2}^*) = 0$. Ceci résulte de la suite exacte de l'exponentielle en tenant compte de $H^2(\mathscr{O}_{p^2}) = H^3(P^2, \mathbf{Z}) = 0$. Le conoyau de la flèche a est donc $H^2(\mathscr{O}_{p^2}(-2D))$ ou par dualité de Serre $H^0(\mathscr{O}_{p^2}(2D) \otimes \mathscr{O}_{p^2}(-3))^\vee$.

Ceci est nul si D est une droite et non nul si D est une conique.

THÉORÈME 2. *Soit* S *une surface projective lisse minimale sur* $\mathbf{C}$ *et* D *une courbe lisse irréductible de self intersection* $D^2 > 0$. *Soit* $D(1)$ *le premier voisinage infinitésimal de* $D, D(1) = (D, \mathscr{O}_S/I^2)$ *où* I *est le faisceau définissant* D *dans* S. *Le morphisme de restriction* $\operatorname{Pic} S \to \operatorname{Pic}(D(1))$ *est surjectif si et seulement si* S *est le plan projectif et* D *une droite.*

Démonstration. Comme précédemment on a la suite exacte

$$\operatorname{Pic} S \xrightarrow{a} \operatorname{Pic} D(1) \to H^2(I^2) \xrightarrow{b} H^2(\mathscr{O}_S^*) \to 0 .$$

L'obstruction au relèvement est dans $\operatorname{Ker} b$ qui contient $\operatorname{Ker}(H^2(I^2) \to H^2(\mathscr{O}_S))$.

Si $\operatorname{Ker}(H^2(I^2) \to H^2(\mathscr{O}_S))$ est non nul, on a une obstruction au relèvement. S'il est nul on obtient $H^2(I^2 \simeq H^2(\mathscr{O}_S))$. Il en résulte la suite exacte

$$0 \to H^0(\mathscr{O}_S) \to H^0(\mathscr{O}_{D(1)}) \to H^1(I^2) \to H^1(\mathscr{O}_S) \to H^1(\mathscr{O}_{D(1)}) \to 0 . \qquad (\alpha)$$

La suite exacte $0 \to I \to \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_D \to 0$ donne

$$0 \to H^1(I) \to H^1(\mathscr{O}_S) \to H^1(\mathscr{O}_D) \to H^2(I) \to H^2(\mathscr{O}_S) \to 0 . \qquad (\beta)$$

La suite exacte $0 \to I^2 \to I \to I/I^2 \to 0$ donne une surjection $H^2(I^2) \to H^2(I) \to 0$. En effet I/I^2 est un $\mathscr{O}_D$-module. C'est le fibré conormal de D dans $S, I/I^2 = \mathscr{O}_D(-D)$.

En résumé on a une surjection $H^2(I) \to H^2(\mathscr{O}_S) \to 0$, une surjection $H^2(I^2) \to H^2(I) \to 0$ et un morphisme $H^2(I^2) \simeq H^2(\mathscr{O}_S)$. Il en résulte que $H^2(I^2) = H^2(I) = H^2(\mathscr{O}_S)$. La suite (β) donne alors $h^1(\mathscr{O}_S) = h^1(I) + h^1(\mathscr{O}_D)$. La suite exacte $0 \to I^2 \to I \to I/I^2 \to$ donne $0 \to H^1(I^2) \to H^1(I) \to H^1(I/I^2) \to 0$. En effet l'hypothèse $D^2 > 0$ donne $H^0(I/I^2) = 0$. De plus $H^2(I^2) = H^2(I)$ et $H^2(I/I^2) = 0$. Le théorème de Riemann-Roch sur la courbe D donne $h^1(I/I^2) = D^2 + g - 1$. Je dis que D est numériquement effectif.

En effet soit C une courbe de S. On écrit $C = D' + nD$ avec $n \geqslant 0$ et D' ne contient pas D. Alors $CD = D'D + nD^2 \geqslant 0$.

Le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg (ou de Ramanujam) donne $h^1(\mathscr{O}_S(-D)) = h^1(I) = 0$.

Il en résulte que $h^1(I^2) = h^1(I/I^2) = 0$. Mais $h^1(I/I^2) = D^2 + g - 1$ avec $D^2 > 0$. On obtient alors $D^2 = 1$ et $g = 0$. Ceci nous donne $h^0(\mathscr{O}_S(D)) = h^0(\mathscr{O}_S) + h^0(\mathscr{O}_D(D)) = 3$ car $\mathscr{O}_D(D) = \mathscr{O}_{P^1}(1)$. On a alors sur la surface S une courbe rationnelle irréductible D telle que $h^0(\mathscr{O}_S(D)) \geqslant 2$. La surface S est donc rationnelle d'après le lemme de Noether ([GH], p. 513). La surface S est donc P^2, une surface de Hirzebruch $P(\mathscr{O}_{P^1} \oplus \mathscr{O}_{P^1}(-e))$,

$e \geqslant 0$, $e \neq 1$, ou l'éclatement d'une de ces surfaces. Si $S = P^2$, D est une droite car $D^2 = 1$. Si $S = P(\mathscr{O}_{P^1} \oplus \mathscr{O}_{P^1}(-e))$, D s'écrit $D = aC_0 + bf$ où C_0 est une section vérifiant $C_0^2 = -e$ et f une fibre de la surface réglée. On a $f^2 = 0$ et $C_0 f = 1$.

Le diviseur canonique est $K = 2C_0 + (-2-e)f$. On doit avoir $D^2 = -a^2e + 2ab = 1$. La formule d'adjonction donne $-2 = D(D+K)$. Ces deux relations donnent le système $a(-ae+2b) = 1$ et $a^2 - 2a - 2b = 3$. On connaît les courbes irréductibles lisses tracées sur les surfaces de Hirzebruch. Les possibilités sont les suivantes:

$$\begin{array}{ll} a = 0 & b = 1 \\ a = 1 & b = 0 \\ a > 0 & b > ae \\ e > 0 & a > 0 \quad b = ae\,. \end{array}$$

Ici on obtient $a = 1$ et $2b = e + 1$. Ceci n'est compatible avec $b \geqslant e$ que pour $e \leqslant 1$. La valeur $e = 0$ est exclue car b est entier. La valeur $e = 1$ est exclue car elle correspond à une surface non minimale. C'est en effet le plan projectif éclaté en un point. C.Q.F.D.

Remarques. On ne peut supprimer l'hypothèse S minimale dans le théorème. En effet si S est l'éclatement de P^2 en un point et D la transformée d'une droite générale de P^2 alors

$$\operatorname{Pic} S \to \operatorname{Pic} D(1) \quad \text{est surjectif}\,.$$

Soit $(S, \mathscr{O}_S(D)) \neq (P^2, \mathscr{O}(1))$. Si $\mathscr{L}(1)$ est un fibré en droites sur $D(1)$ qui est restriction d'un fibré $\mathscr{L}$ sur S, il faut pour résoudre complètement le problème de Reiss pouvoir relever les sections.

Soit $\sigma(1) \in H^0(\mathscr{L}(1))$. La suite exacte

$$0 \to I^2 \otimes \mathscr{L} \to \mathscr{L} \to \mathscr{L}(1) \to 0$$

donne

$$0 \to H^0(I^2 \otimes \mathscr{L}) \to H^0(\mathscr{L}) \to H^0(\mathscr{L}(1)) \to H^1(I^2 \otimes \mathscr{L})\,.$$

Si $H^1(I^2 \otimes \mathscr{L}) = 0$, on pourra toujours relever une section. La relation de Reiss a été obtenue en 1837 [R]. Une généralisation au cas des hypersurfaces d'un espace projectif a été obtenue par Wood [W]. Une généralisation au cas des sous-variétés d'un espace projectif a été obtenue par Akivis [A]. Little [L] a obtenu les relations de Reiss du 1er ordre pour les courbes tracées sur des surfaces de Hirzebruch. On peut se demander si la caractérisation du plan

projectif obtenue ici s'étend à P^n, $n \geqslant 3$. De façon précise si M est une variété projective lisse de dimension n et C une courbe lisse irréductible de M, que peut-on déduire de la surjectivité de $\operatorname{Pic} M \to \operatorname{Pic} C(1)$? Il faut faire des hypothèses convenables sur le fibré normal de C dans M. Il faut aussi trouver par quoi remplacer l'hypothèse S minimale. Il serait intéressant de relier ceci à la caractérisation de l'espace projectif par l'amplitude du fibré tangent [M].

Nous espérons aborder ces questions dans un travail ultérieur.

BIBLIOGRAPHIE

[A] AKIVIS, M.A. The local algebraizability condition for a system of submanifolds. *Soviet Math. Dokl 28, No. 2* (1983), 507-509.

[GH] GRIFFITHS, P. and J. HARRIS. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Interscience, 1978.

[H] HARTSHORNE, R. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1977.

[L] LITTLE, J.J. On analogs of the Reiss relation for curves on rational ruled surfaces. *Duke Math J. 52* (1985), 909-922.

[M] MORI, S. Projective manifolds with ample tangent bundles. *Ann. Math. 110* (1979), 593-606.

[R] REISS, M. Mémoire sur les propriétés générales des courbes algébriques. *Corresp. math. et. phys. de Quetelet, 9* (1837), 249-308.

[S] SOMMESE, A.J. Hyperplane sections of projective surfaces. *Duke Math. J. 46* (1979), 377-401.

[V] VAN DE VEN, A. On the 2-connectedness of very ample divisors on a surface. *Duke Math J. 46* (1979), 403-407.

[W] WOOD, J.A. A simple criterion for local hypersurfaces to be algebraic. *Duke Math J. 51* (1984), 235-237.

(Reçu le 25 mai 1994)

Jean d'Almeida

URA au CNRS 0751 D
Département de Mathématiques
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 – Villeneuve d'Ascq Cedex
France