6. Corps de fonctions d'une quadrique

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

THÉORÈME 6. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant* 1, *et tout polynôme irréductible et unitaire $f \in k[X]$, on a:*

$$q_{k(f)} \text{ est hyperbolique } \Rightarrow f \in G(q_{k(X)}) .$$

THÉORÈME 7 (théorème de la norme de Scharlau). *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant* 1, *et toute extension finie E de k, on a:*

$$N_{E/k}(G(q_E)) \subset G(q) .$$

THÉORÈME 8. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant* 1, *$G(q)$ contient le groupe $< N_{E/k}(E^*) >$ engendré par les normes des extensions finies E de k telles que q_E soit hyperbolique.*

Remarque. Gille [2] et Merkurjev [5], [6] ont généralisé certains des énoncés étudiés dans ce §.

6. Corps de fonctions d'une quadrique

Supposons f homogène de degré 2. Alors f est aussi une forme quadratique. On suppose que $m > 2$ ou $m = 2$ et f anisotrope, ce qui implique que le polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est irréductible. Le corps $k(f)$ est appelé le *corps de zéros générique* de la forme quadratique f. C'est aussi le corps des fonctions de la quadrique (affine) correspondante.

Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur k. Remarquons que l'on a les inclusions suivantes:

$$G_m(q) \subset D_m(q) \subset < D_m(q) > .$$

THÉORÈME 9. *Supposons que la forme quadratique f représente* 1. *Alors on a:*

a) $q_{k(f)}$ est hyperbolique si et seulement si $f \in G_m(q)$;

b) q contient f si et seulement si $f \in D_m(q)$;

c) $q_{k(f)}$ est isotrope si et seulement si $f \in < D_m(q) >$.

a) est un cas particulier du corollaire du théorème 2 (voir aussi [4], 4.5.3), b) est le «théorème de la sous-forme» de Pfister (cf. [4], th. 9.2.8), et c) est un cas particulier du corollaire du théorème 1.

Voici une autre démonstration de c). On montre ici que si $q_{k(f)}$ est isotrope, alors $f \in < D_m(q) >$, l'autre implication étant facile. Ecrivons la forme quadratique f comme $f \simeq <1> \oplus f'$. Alors $k(f) = F(\sqrt{-f'(X')})$, où $X' = (X_2, ..., X_m)$ et $F = k(X')$. Supposons $q_{k(f)}$ isotrope. Alors par [4], 2.5.1, on a:

$$q_F \simeq a <1, f'(X')> \oplus q' \simeq <a> \oplus q'' .$$

Donc $a \in D(q_F) \subset D_m(q)$.

D'autre part, $<1, f'(X')>$ représente f sur $F(X_1) = k(X_1, ..., X_m)$. Donc $a <1, f'(X')>$ représente af sur $k(X_1, ..., X_m)$. On en déduit que $af \in D_m(q)$. Comme $a \in D_m(q)$, on a $f \in <D_m(q)>$.

7. Applications

Voici quelques applications du théorème 1:

Sommes de carrés

Corollaire 1. *Soit s un entier positif. Si un polynôme $f \in k[X_1, ..., X_m]$ est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, ..., X_m)$, alors tout polynôme irréductible et unitaire divisant f avec un exposant impair est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, ..., X_m)$.*

Soit q la forme quadratique somme de 2^s carrés. Alors q est une forme de Pfister, donc $D(q) = <D(q)>$ (cf. [4], chap. 2, § 10 ou [3], chap. 10, cor. 1.7). Le corollaire découle de l'implication $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, appliqué au produit des polynômes irréductibles divisant f avec un exposant impair.

Le cas $m = 1$ de ce corollaire est dû à Kaplansky (cf. [4], chap. 10, cor. 2.10).

Principe de Hasse

Soit k un corps de nombres. On note v une place (finie ou infinie) de k, et k_v le complété de k en v. Soit q une forme quadratique anisotrope sur k.

Corollaire 2. *Soit $f \in k[X]$. Alors*

$$f \in <D(q_{k_v(X)})> \text{ pour toute place } v \text{ de } k \Leftrightarrow f \in <D(q_{k(X)})> .$$

Il est clair que $f \in <D(q_{k(X)})> \Rightarrow f \in <D(q_{k_v(X)})>$ pour toute place v de k.