

6. Corps de fonctions d'une quadrique

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

THÉORÈME 6. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, et tout polynôme irréductible et unitaire $f \in k[X]$, on a:*

$$q_{k(f)} \text{ est hyperbolique} \Rightarrow f \in G(q_{k(X)}).$$

THÉORÈME 7 (théorème de la norme de Scharlau). *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, et toute extension finie E de k , on a:*

$$N_{E/k}(G(q_E)) \subset G(q).$$

THÉORÈME 8. *Pour toute forme quadratique q sur k anisotrope et représentant 1, $G(q)$ contient le groupe $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$ engendré par les normes des extensions finies E de k telles que q_E soit hyperbolique.*

Remarque. Gille [2] et Merkurjev [5], [6] ont généralisé certains des énoncés étudiés dans ce §.

6. CORPS DE FONCTIONS D'UNE QUADRIQUE

Supposons f homogène de degré 2. Alors f est aussi une forme quadratique. On suppose que $m > 2$ ou $m = 2$ et f anisotrope, ce qui implique que le polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est irréductible. Le corps $k(f)$ est appelé le *corps de zéros générique* de la forme quadratique f . C'est aussi le corps des fonctions de la quadrique (affine) correspondante.

Soit q une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur k . Remarquons que l'on a les inclusions suivantes:

$$G_m(q) \subset D_m(q) \subset \langle D_m(q) \rangle.$$

THÉORÈME 9. *Supposons que la forme quadratique f représente 1. Alors on a:*

- a) $q_{k(f)}$ est hyperbolique si et seulement si $f \in G_m(q)$;
- b) q contient f si et seulement si $f \in D_m(q)$;
- c) $q_{k(f)}$ est isotrope si et seulement si $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

a) est un cas particulier du corollaire du théorème 2 (voir aussi [4], 4.5.3), b) est le «théorème de la sous-forme» de Pfister (cf. [4], th. 9.2.8), et c) est un cas particulier du corollaire du théorème 1.

Voici une autre démonstration de c). On montre ici que si $q_{k(f)}$ est isotrope, alors $f \in \langle D_m(q) \rangle$, l'autre implication étant facile. Écrivons la

forme quadratique f comme $f \simeq \langle 1 \rangle \oplus f'$. Alors $k(f) = F(\sqrt{-f'(X')})$, où $X' = (X_2, \dots, X_m)$ et $F = k(X')$. Supposons $q_{k(f)}$ isotrope. Alors par [4], 2.5.1, on a:

$$q_F \simeq a \langle 1, f'(X') \rangle \oplus q' \simeq \langle a \rangle \oplus q'' .$$

Donc $a \in D(q_F) \subset D_m(q)$.

D'autre part, $\langle 1, f'(X') \rangle$ représente f sur $F(X_1) = k(X_1, \dots, X_m)$. Donc $a \langle 1, f'(X') \rangle$ représente af sur $k(X_1, \dots, X_m)$. On en déduit que $af \in D_m(q)$. Comme $a \in D_m(q)$, on a $f \in \langle D_m(q) \rangle$.

7. APPLICATIONS

Voici quelques applications du théorème 1:

SOMMES DE CARRÉS

COROLLAIRE 1. *Soit s un entier positif. Si un polynôme $f \in k[X_1, \dots, X_m]$ est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$, alors tout polynôme irréductible et unitaire divisant f avec un exposant impair est une somme de 2^s carrés dans $k(X_1, \dots, X_m)$.*

Soit q la forme quadratique somme de 2^s carrés. Alors q est une forme de Pfister, donc $D(q) = \langle D(q) \rangle$ (cf. [4], chap. 2, §10 ou [3], chap. 10, cor. 1.7). Le corollaire découle de l'implication $a) \Rightarrow b)$ du théorème 1, appliqué au produit des polynômes irréductibles divisant f avec un exposant impair.

Le cas $m = 1$ de ce corollaire est dû à Kaplansky (cf. [4], chap. 10, cor. 2.10).

PRINCIPE DE HASSE

Soit k un corps de nombres. On note v une place (finie ou infinie) de k , et k_v le complété de k en v . Soit q une forme quadratique anisotrope sur k .

COROLLAIRE 2. *Soit $f \in k[X]$. Alors*

$$f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle \text{ pour toute place } v \text{ de } k \Leftrightarrow f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle .$$

Il est clair que $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle \Rightarrow f \in \langle D(q_{k_v(X)}) \rangle$ pour toute place v de k .