

## 5. Extensions finies formulations équivalentes des critères du §2

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **41 (1995)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

En effet, soit  $E$  une extension de degré impair de  $k$ . Toute extension peut être obtenue comme composée d'extensions monogènes. On peut donc supposer que  $E$  est de la forme  $E = k(f)$ , où  $f$  est un polynôme irréductible et unitaire de degré impair. Soit  $q$  une forme quadratique anisotrope et représentant 1. Alors tous les polynômes appartenant à  $D(q_{k(X)}) = D_1(q)$  sont de degré pair. Donc  $f$  n'est pas dans  $\langle D_1(q) \rangle$ . Par le corollaire du théorème 1, ceci implique que  $q$  n'est pas isotrope sur  $E$ .

De même, le théorème 2 entraîne la forme faible du théorème de Springer :

**THÉORÈME DE SPRINGER (forme faible).** *Si une forme quadratique devient hyperbolique sur une extension de degré impair, alors elle est hyperbolique.*

## 5. EXTENSIONS FINIES

### FORMULATIONS ÉQUIVALENTES DES CRITÈRES DU §2

On suppose encore que  $m = 1$ . Dans ce cas, on obtient des reformulations intéressantes des critères du §2, en particulier en termes de «principes de normes». Le but de ce paragraphe est de faire remarquer que les théorèmes ci-dessous sont *équivalents*.

Soit  $q$  une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur  $k$ .

**THÉORÈME 3 (cor. du th. 1).** *Soit  $f \in k[X]$  un polynôme irréductible et unitaire. On a :*

$$q_{k(f)} \text{ est isotrope } \Rightarrow f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle .$$

**THÉORÈME 4 (Théorème de la norme de Knebusch).** *Soit  $E$  une extension finie de  $k$ . Alors on a :*

$$N_{E/k}(\langle D(q_E) \rangle) \subset \langle D(q) \rangle .$$

**THÉORÈME 5.** *Le groupe  $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$  engendré par les normes des extensions finies  $E$  de  $k$  telles que  $q_E$  soit isotrope est contenu dans  $\langle D(q) \rangle$ .*

Th. 3  $\Rightarrow$  th. 4: Comme  $q$  représente 1 sur  $k$ , il existe  $a_1, \dots, a_{n-1} \in k^*$  tels que  $q \simeq \langle 1, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle$ . Soit  $\alpha \in D(q_E)$ . Il existe  $x, x_1, \dots, x_{n-1} \in E$  tels que  $\alpha = x^2 + a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$ . Posons  $a = a_1 \cdot x_1^2 + \dots + a_{n-1} \cdot x_{n-1}^2$ . Alors  $q_E \simeq \langle 1, a \rangle \oplus q'$ , et  $\alpha = x^2 + a$ . Posons

$L = E(\sqrt{-a})$ . Alors  $q_L$  est isotrope. On a soit  $L = E$ , soit  $[L : E] = 2$ . Posons  $\beta = \alpha$  dans le premier cas, et  $\beta = x + \sqrt{-a}$  dans le deuxième. On a alors  $N_{L/E}(\beta) = \alpha$ . Soit  $F = k(\beta)$ . Notons  $d = [L : F]$ . Si  $d$  est pair, alors  $N_{L/k}(\beta) = N_{F/k}(\beta)^d$  est un carré. Donc  $N_{E/k}(\alpha) = N_{L/k}(\beta) \in \langle D(q) \rangle$ . Supposons que  $d$  soit impair. Comme  $q_L$  est isotrope, le théorème de Springer entraîne que  $q_F$  est aussi isotrope. Soit  $f \in k[X]$  le polynôme minimal de  $\beta$  sur  $k$ . Alors  $F = k(f)$ . On a donc  $q_{k(f)}$  isotrope. Par le théorème 3, ceci entraîne  $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle$ . Comme  $q$  est anisotrope et  $q_F$  isotrope, par le théorème de Springer on voit que  $[F : k]$  est pair. On a  $N_{F/k}(\beta) = (-1)^{[F:k]} f(0) = f(0)$ . Comme  $f \in \langle D(q_{k(X)}) \rangle$ , on a  $f(0) \in \langle D(q) \rangle$ . Mais  $N_{E/k}(\alpha) = N_{L/k}(\beta) = N_{F/k}(\beta)^d = N_{F/k}(\beta) \pmod{k^{*2}}$ . Donc  $N_{E/k}(\alpha) \in \langle D(q) \rangle$ .

Th. 4  $\Rightarrow$  th. 5: Si  $q_E$  est isotrope, alors  $D(q_E) = E^*/E^{*2}$ . Par le théorème 4,

$$N_{E/k}(E^*) = N_{E/k}(\langle D(q_E) \rangle) \subset \langle D(q) \rangle .$$

Th. 5  $\Rightarrow$  th. 3: Soit  $f \in k[X]$  un polynôme irréductible et unitaire. Soit  $E = k(f)$ , et posons  $F = k(X)$ ,  $K = E(X)$ . Soit  $\theta$  une racine de  $f$  dans  $E$ .

Supposons que  $q_{k(f)} = q_E$  soit isotrope. Alors  $q_K$  est aussi isotrope. On a  $X - \theta \in K^*$ . Par le théorème 5, on a donc

$$f = N_{K/F}(X - \theta) \in \langle D(q_F) \rangle = \langle D(q_{k(X)}) \rangle .$$

*Remarque.* Les résultats des deux derniers § montrent que le théorème de la norme de Knebusch entraîne le théorème de Springer. Le fait que ces théorèmes de Knebusch et de Springer sont liés a déjà été remarqué par Witt, dans un manuscrit non publié. Je remercie Ina Kersten de m'avoir signalé l'existence de ce manuscrit de Witt, qui paraîtra dans [10].

*Remarque.* Avec les hypothèses du théorème 5, on a en fait *égalité* entre  $\langle D(q) \rangle$  et le groupe  $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$  engendré par les normes des extensions finies de  $E$  de  $k$  telles que  $q_E$  soit isotrope. En effet, il suffit de démontrer que  $\langle D(q) \rangle$  est contenu dans le groupe engendré par les  $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$ . Soit  $\alpha \in D(q)$ . On peut supposer que  $q \simeq \langle 1, a \rangle \oplus q'$ , et que  $\alpha = x^2 + a \cdot y^2$  avec  $x, y \in k$ . Posons  $E = k(\sqrt{-a})$ . Alors  $q_E$  est isotrope. Or,  $\alpha = N_{E/k}(x + y\sqrt{-a})$ . Donc on a bien  $\alpha \in N_{E/k}(E^*)$ , d'où aussi  $\langle D(q) \rangle \subset N_{E/k}(E^*)$ .

De manière similaire, on montre que les théorèmes 6, 7 et 8 ci-dessous sont équivalents:

THÉORÈME 6. *Pour toute forme quadratique  $q$  sur  $k$  anisotrope et représentant 1, et tout polynôme irréductible et unitaire  $f \in k[X]$ , on a:*

$$q_{k(f)} \text{ est hyperbolique} \Rightarrow f \in G(q_{k(X)}).$$

THÉORÈME 7 (théorème de la norme de Scharlau). *Pour toute forme quadratique  $q$  sur  $k$  anisotrope et représentant 1, et toute extension finie  $E$  de  $k$ , on a:*

$$N_{E/k}(G(q_E)) \subset G(q).$$

THÉORÈME 8. *Pour toute forme quadratique  $q$  sur  $k$  anisotrope et représentant 1,  $G(q)$  contient le groupe  $\langle N_{E/k}(E^*) \rangle$  engendré par les normes des extensions finies  $E$  de  $k$  telles que  $q_E$  soit hyperbolique.*

*Remarque.* Gille [2] et Merkurjev [5], [6] ont généralisé certains des énoncés étudiés dans ce §.

## 6. CORPS DE FONCTIONS D'UNE QUADRIQUE

Supposons  $f$  homogène de degré 2. Alors  $f$  est aussi une forme quadratique. On suppose que  $m > 2$  ou  $m = 2$  et  $f$  anisotrope, ce qui implique que le polynôme  $f \in k[X_1, \dots, X_m]$  est irréductible. Le corps  $k(f)$  est appelé le *corps de zéros générique* de la forme quadratique  $f$ . C'est aussi le corps des fonctions de la quadrique (affine) correspondante.

Soit  $q$  une forme quadratique anisotrope et représentant 1 sur  $k$ . Remarquons que l'on a les inclusions suivantes:

$$G_m(q) \subset D_m(q) \subset \langle D_m(q) \rangle.$$

THÉORÈME 9. *Supposons que la forme quadratique  $f$  représente 1. Alors on a:*

- a)  $q_{k(f)}$  est hyperbolique si et seulement si  $f \in G_m(q)$ ;
- b)  $q$  contient  $f$  si et seulement si  $f \in D_m(q)$ ;
- c)  $q_{k(f)}$  est isotrope si et seulement si  $f \in \langle D_m(q) \rangle$ .

a) est un cas particulier du corollaire du théorème 2 (voir aussi [4], 4.5.3), b) est le «théorème de la sous-forme» de Pfister (cf. [4], th. 9.2.8), et c) est un cas particulier du corollaire du théorème 1.

Voici une autre démonstration de c). On montre ici que si  $q_{k(f)}$  est isotrope, alors  $f \in \langle D_m(q) \rangle$ , l'autre implication étant facile. Écrivons la